Jeu de société 1

Année 2022 – 2023

Adrian ZAINOUN, Hector MEUNIER, Julien JOLY, Laurent FIRPO-LIFSCHITZ,
Malo COLLET--HAGLUND, élèves de classes de Seconde 4, 5 et 6

Établissement : Lycée Blaise PASCAL d'Orsay

Enseignantes : Cécile CHIPOT et Hélène COCHARD

Chercheuse : Blandine GALIAY, Département Maths de l'ENS Paris-Saclay

1. Présentation du sujet

Soit $N \geq 3$. Un groupe de $N + 1$ personnes joue à un jeu. Les règles sont les suivantes : l'un des joueurs, le meneur, se tient debout, au centre d'un cercle formé par les N joueurs restants assis en rond. Le meneur choisit 2 personnes parmi les N joueurs assis, un choix qu'il garde secret.

À chaque tour, les joueurs assis doivent désigner une personne du cercle. Si cette personne fait partie des deux choix du meneur, les joueurs ont gagné et le jeu s'arrête. Sinon, la personne désignée quitte le cercle et on passe au tour suivant. Pour aider les joueurs, le meneur indique à chaque tour la position relative des deux personnes qu'il a choisies.

Peut-on trouver une stratégie efficace pour gagner en le moins de coups possibles ?

Nous avons beaucoup réfléchi avant de trouver une solution au problème sus énoncé. Nous sommes heureux de mettre un terme à notre impatience, en vous annonçant la solution à ce problème, substantifique à la moelle même du sujet.

2. Résultats

Nous appellerons D_n la distance entre les deux joueurs au tour n.

Notre stratégie comporte deux phases.

Nombre de tours maximal (phase 1) : $\left\lceil \frac{N}{D_0 - 1} \right\rceil$

Nombre de tours maximal (phase 2) : $\lceil log_2(D_0 - 1) \rceil$

Nombre de tours maximal total : $\left\lceil \frac{N}{D_0-1} \right\rceil + \lceil log_2(D_0-1) \rceil$

3. Texte de l'article

Un nombre N de joueurs jouent à un jeu de société. Ceux-ci se placent le long d'un cercle et un meneur (non compté dans N) se place au centre de ce cercle.

Au tour 0, le meneur désigne secrètement deux joueurs du cercle. Par la suite, les joueurs vont s'accorder pour éliminer un joueur par tour, avec pour but commun d'éliminer un des joueurs cibles. La méthode à laquelle nous avons abouti se sépare en deux parties.

Pour les besoins de nos explications, attribuons un numéro à chaque joueur du cercle initial, numéros distribués dans le sens horaire, de 1 à N (fig. 1). Il est important de noter que ces numéros sont invariables dans le temps.

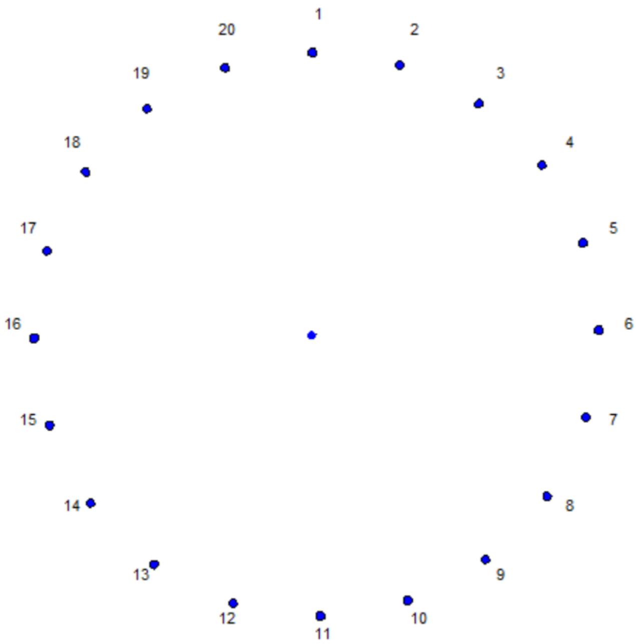

Figure 1 : Disposition et numérotation des joueurs

Afin d'éviter quelques cas particuliers, ce que nous appelons la distance ou position relative D_n au tour n est définie comme suit. Au tour 0, lorsque le meneur désigne les cibles, D_n représente la distance entre les deux joueurs (le plus court chemin arc de cercle qui les relie). Aux tours suivants, D_n représente encore l'écart entre les deux joueurs, mais pas forcément le plus petit arc de cercle qui les relie : D_n reste toujours du même côté du cercle et ne se « retourne » pas (fig. 2 & 3).

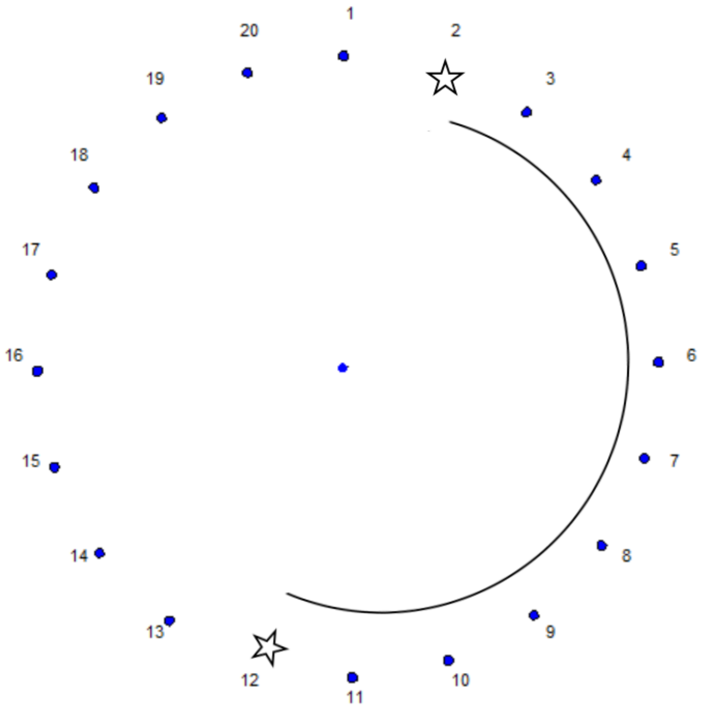

Figure 2 : Distance (arc de cercle noir) entre les deux joueurs cibles (étoiles)

Sur le schéma ci-dessous, la tête de mort représente le joueur qui a été supprimé.

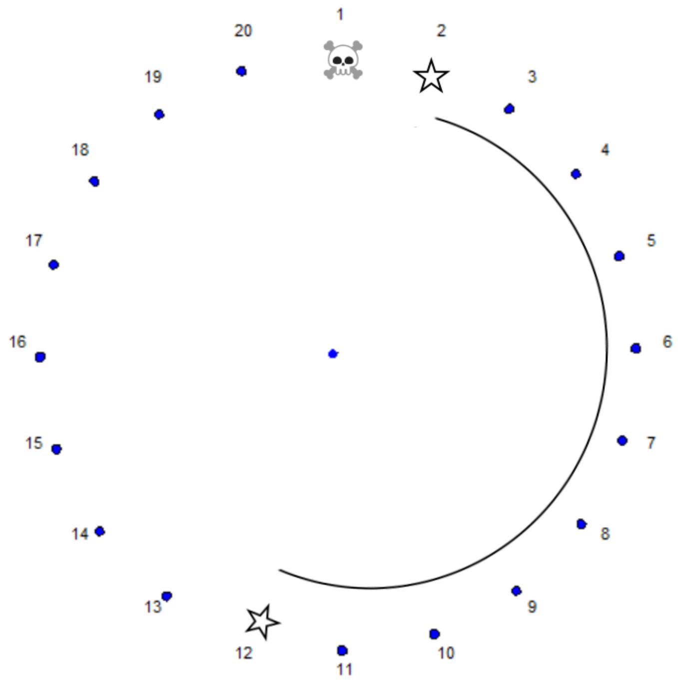

Figure 3 : « Distance » entre les 2 joueurs, qui n'est plus le plus petit écart entre les deux cibles

Notre stratégie comporte alors deux phases qui seront expliquées aux paragraphes 3.1 et 3.2.

3.1. Rapprocher les joueurs cibles

Le but de la première phase est de rapprocher de une unité les deux joueurs cibles, ce qui revient à faire diminuer la distance relative à un tour h, soit avoir $D_h < D_{h-1}$.

Pour ce faire, annihilons le joueur 1 et appelons le j_1. La variable j_n valant le numéro du joueur éliminé au tour n. Nous constatons alors que $D_0 = D_1$. Le joueur j_1 n'est donc pas situé dans l'arc de cercle représenté sur les figures 2 et 3. Ainsi sur notre exemple :

$D_0 = D_1 = 10$.

Notre méthode recherchant une optimisation, nous cherchons à éliminer le moins de joueurs possible, en parcourant donc le cercle le plus rapidement. La vitesse la plus juste est de se déplacer de $D_0 + 1$ en $D_0 + 1$, pour la raison suivante : nous avançons vite, sans toutefois sauter de joueur susceptible d'être une cible. En effet, si les joueurs que nous survolons étaient des cibles, on aurait eu $D_0 > D_1$, ce qui n'est pas le cas.

Supprimons un joueur situé à $D_0 + 1$ du premier joueur éliminé : $J_2 \leftarrow J_1 \pm (D_0 + 1)$.

Tant que $D_n = D_{n-1}$, nous appliquons cette méthode. Une fois cette égalité devenue fausse, nous appliquons alors la deuxième phase de notre méthode.

Sur l'exemple de la figure 3 on a J_2=11 et $D_2 = 9$. Nous savons donc qu'un joueur cible se trouve entre 1 et 11. Nous passons à la deuxième phase.

3.2 Dichotomie

Au tour h il y a plusieurs couples de joueurs recherchés possibles (voir fig. 54): les couples étant représentés par des formes géométriques différentes). En agissant par dichotomie on va pouvoir faire diminuer le nombre de couples possibles de moitié à chaque tour.

Pour ce faire éliminons $j_{h+1} = j_h \pm \left\lceil \frac{D_h}{2} \right\rceil$.

Si $D_{h+1} = D_h$, alors un des joueurs des couples possibles se trouvera entre les joueurs aux numéros j_h et j_{h+1}.

Si, en revanche, $D_{h+1} < D_h$, alors un des joueurs des couples possibles se trouvera entre les joueurs numérotés j_{h+1} (◆) et $j_h \pm D_h$ (◆).

Dans le premier cas, $j_{h+2} = j_h \pm \left\lceil \frac{D_h}{4} \right\rceil$ (◆)

Dans le second cas, $j_{h+2} = j_{h+1} \pm \left\lceil \frac{D_h}{4} \right\rceil^{(\blacklozenge)}$

De manière générale, $j_{h+s} = j_{h+s-2} \pm \left\lceil \frac{D_h}{2^s} \right\rceil^{(\blacklozenge)}$ dans le premier cas ou $j_{h+s} = j_{h+s-1} \pm \left\lceil \frac{D_h}{2^s} \right\rceil^{(\blacklozenge)}$ dans le second cas.

Notons que dans les formules◆, le $\pm$ est simultanément le même signe.

3.3 Démonstrations

Nous recherchons le nombre de tours total de cette méthode présumée optimale, c'est-à-dire dans le pire des cas, la méthode qui est la plus rapide.

Théorème :

- Dans le pire des cas, le nombre d'étapes de notre méthode est :…
- En appelant « méthode optimale » une méthode la plus rapide dans le pire des cas, la méthode présentée est optimale

Démonstration :

Notre méthode se découpe en deux phases, calculons donc le nombre de tours de chaque phase.

Dans le pire des cas, la distance relative diminuera à la toute fin de notre stratégie, qui relève d'une simple division.

Donc pour la phase 1 : $h = \left\lceil \frac{N}{D_0+1} \right\rceil$

Grâce à la méthode par dichotomie, il ne restera qu'un seul joueur à éliminer lorsque :

$\left\lceil \frac{D_h}{2^s} \right\rceil = 1 \Leftrightarrow \lceil D_h \rceil = 2^s \Leftrightarrow \mathrm{s} = log_2(D_h)$

Or, $D_h = D_0 - 1$

Donc pour la phase 2 : $\mathrm{s} = log_2(D_0 - 1)$

On aura donc gagné au tour : $s + h = \left\lceil \frac{N}{D_0+1} \right\rceil + \log_2(D_0 - 1)$

4. Conclusion

Nous avons donc abouti à une méthode, optimale. Cependant, comme l'ont souligné les travaux d'autres groupes sur le même sujet, il est important de bien définir la notion d'optimisation. Nous avons fait le choix d'élaborer une technique pour le pire des cas, tandis que l'on pourrait tout aussi bien prendre le pari d'avoir une stratégie qui sur le plan statistique est la plus efficace, et qui profite de la chance.

Notre méthode, qui consiste à faire diminuer la distance entre les deux joueurs, puis de les trouver à l'aide de la dichotomie, permet dans le pire des cas, de gagner au plus vite, c'est-à-dire en $\left[\frac{N}{D_0+1}\right] + \log_2(D_0 - 1)$ tours.