Math.en.Jeans - Lycée B.Pascal Orsay 2021-2022

Lucas Ertzbischoff

lucas.ertzbischoff@polytechnique.edu

1 - L'éternelle fortune

On dispose d'un nombre fini de pièces d'or, initialement réparties en un nombre fini de tas. On modifie la répartition de la façon suivante : on retire une pièce d'or dans chaque tas et les pièces retirées forment alors un nouveau tas.

Par exemple, une fortune initiale à 7 pièces d'or répartie en 3 tas de la forme $2-2-3$ (c'est-à-dire contenant respectivement 2, 2 et 3 pièces d'or) sera transformée en $1-1-2-3$ tandis qu'une fortune initiale à 10 pièces d'or répartie en 4 tas de la forme $1-3-3-3$ (c'est-à-dire contenant respectivement 1, 3 et 3 et 3 pièces d'or) sera transformée en $2-2-2-4$. On répète ensuite l'opération précédente sur la répartition ainsi obtenue, et ainsi de suite.

Cette procédure s'arrête-t-elle, et si oui, en quel sens ? Y a-t-il toujours une répartition finale des pièces d'or et combien de transformations sont nécessaires pour l'atteindre ?

2 - Soirée groupée

Dans une soirée, il y a $N \geq 1$ invités à l'instant N. A l'instant suivant, un nouvel invité arrive à la fête. Des groupes se créent dès le début de la soirée selon la règle suivante : à l'instant $N+1$, le nouvel invité arrive parmi les N personnes déjà présentes et décide

— soit de créer un nouveau groupe et de le rejoindre, avec une probabilité $\frac{a}{a+N}$ où $a \geq 0$ est donné et fixé ;

— soit de rejoindre un groupe déjà existant et comportant k invités, avec une probabilité $\frac{k}{a+N}$.

Une fois qu'un invité s'installe dans un groupe, il ne le quitte plus au cours de la soirée. De plus, aucun invité ne quitte la soirée. On laisse alors la soirée évoluer selon la règle précédente.

A l'instant $N \geq 1$, y a-t-il beaucoup de groupes composés d'une seule personne, ou au contraire, observe-t-on souvent un unique groupe d'invités ? Comment se répartissent les groupes en général à l'instant $N \geq 1$? Et si on laisse la soirée se dérouler ?

3 - Aléa sur le rivage

Le Mont Saint-Michel organise le jeu suivant, avec un nombre $N \geq 2$ de participants. Ceux-ci doivent ramasser des coquillages qu'on peut trouver à marée basse. On trouve deux types de coquillages : des coquillages *bretons* et des coquillages *normands*. La probabilité de tomber sur un coquillage breton est toujours la même et vaut $q \in]0,1[$.

Chaque participant a le droit de ramasser successivement et au plus $c \geq 2$ coquillages et doit s'arrêter lorsqu'il trouve son premier coquillage breton. Son nombre de points est alors le nombre de coquillages normands ramassés auparavant. (étant entendu que le score est égal à c s'il n'a ramassé aucun coquillage breton). On suppose que les ramassages de chaque participant sont indépendants les uns des autres. Les joueurs gagnants sont ceux qui ont obtenu le plus petit score.

Quand y a-t-il un seul gagnant ? Plusieurs ? Et avec quelle probabilité ? En moyenne, combien y a-t-il de joueurs gagnants ? Que se passe-t-il si beaucoup de joueurs viennent au Mont Saint-Michel ? Et si on augmente considérablement le nombre de coquillages ramassés à chaque partie ?

4 - Partage et pâturage

Trois bergers et bergères, Daphnée, Virgile et Auguste, débattent à propos de leur troupeau respectif. Chacun d'eux a fait une observation inhabituelle.

Daphnée, qui possède 619 moutons, a remarqué que si elle choisissait un mouton dans son troupeau, elle pouvait toujours partager les moutons restants en 6 groupes de poids égaux. Virgile, qui possède 1001 moutons, annonce avoir fait la même observation en retirant 2 moutons et en divisant les moutons restants en 9 groupes. Auguste, qui possède 303 moutons, a observé la même chose que Daphnée, mais seulement avec un partage en 2 groupes.

Chacun affirme alors que les moutons de son troupeau possèdent tous le même poids. Ont-ils raison ? Peut-on généraliser leurs observations pour un nombre et un partage quelconques de moutons ?

5 - Oubli à Macondo

Dans le lointain village de Macondo, les habitants font face à la peste de l'oubli qui est subitement apparue dans la région. Ils semblent se remémorer tous les nombres qu'ils connaissaient auparavant, comme 0, 1, 100, -3, et même π et $\sqrt{2}$, mais, ils ont oublié comment calculer. Désormais, ils appellent '*somme*' de deux nombres le maximum entre ces deux nombres et '*produit*' de deux nombres l'ancienne addition entre ces deux nombres. Par exemple, la *somme* de 3 et 4 vaut 4 tandis que le *produit* de 3 et 4 vaut 7. En attendant que le peste de l'oubli disparaisse, les habitants du village doivent s'organiser et vivre avec ces nouvelles habitudes de calcul.

Pouvez-vous les aider ? Comment fonctionne cette nouvelle façon de calculer ? Plus précisément, comment vont s'effectuer les échanges et les partages au sein du village ? Comment les architectes du village vont-ils effectuer leur travail ?

6 - Suivre le courant

Le capitaine du navire *Coriolis* navigue dans un lointain archipel et transporte des voyageurs parmi $N \geq 1$ îles. Son port de départ et d'arrivée est toujours le même et se situe sur l'île numéro 1. Il connaît très mal la région et choisit l'itinéraire de façon aléatoire en se laissant porter par les vagues. Il peut par exemple passer de l'île numéro 1 à l'île numéro 4, puis l'île numéro N, puis l'île numéro 3... etc jusqu'à revenir à l'île numéro 1. Il visite chaque île une et une seule fois.

On suppose que les îles sont alignées dans l'ordre croissant de leur numéro $(1, 2, 3, \cdots, N)$ et que deux îles consécutives sont distantes d'une longueur $d > 0$.

Y a-t-il une longueur maximale ou minimale parcourue par le *Coriolis* ? A quelle longueur de trajet doit-on s'attendre en moyenne ?