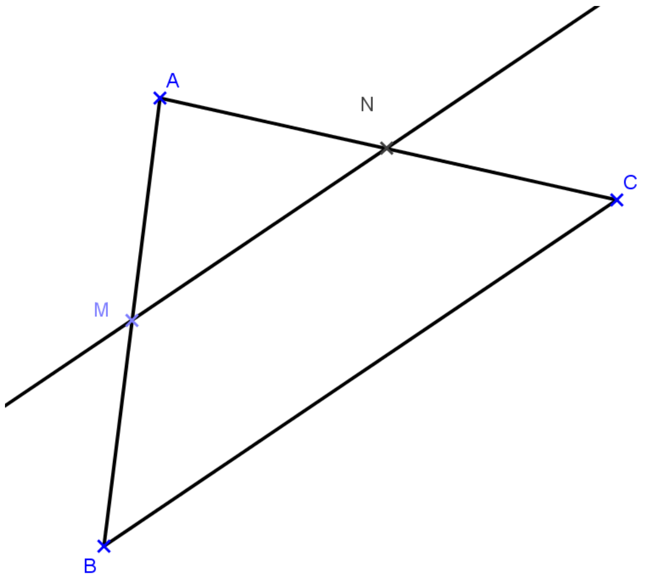
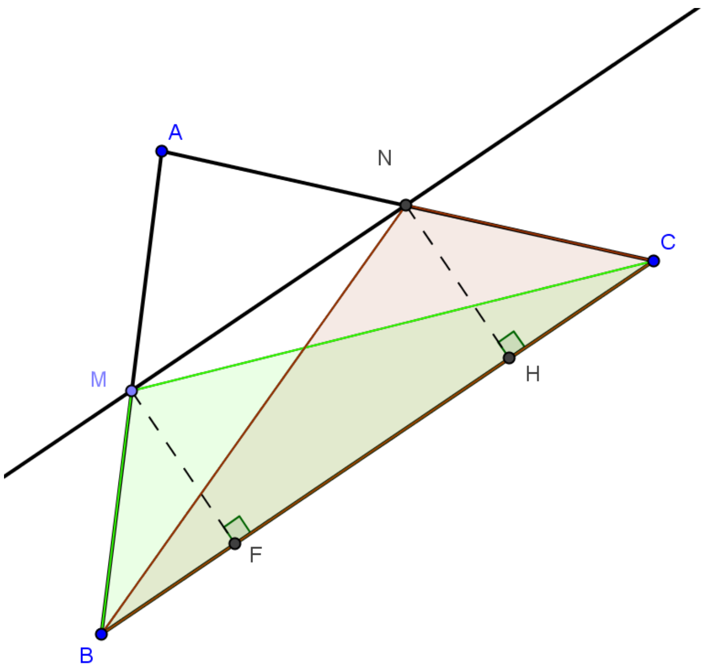
Une démonstration du théorème de Thalès (signée Euclide).

Soit ABC un triangle, et soient M un point de [AB] et N un point de [AC] tels que (MN) soit parallèle à (BC).



<u>• On s'intéresse à A_{BMC} et A_{BNC} les aires des triangles BMC et BNC.</u>

Pour cela on trace les hauteurs [MF] et [NH].



On a : $A_{BMC} = \frac{BC \times MF}{2}$

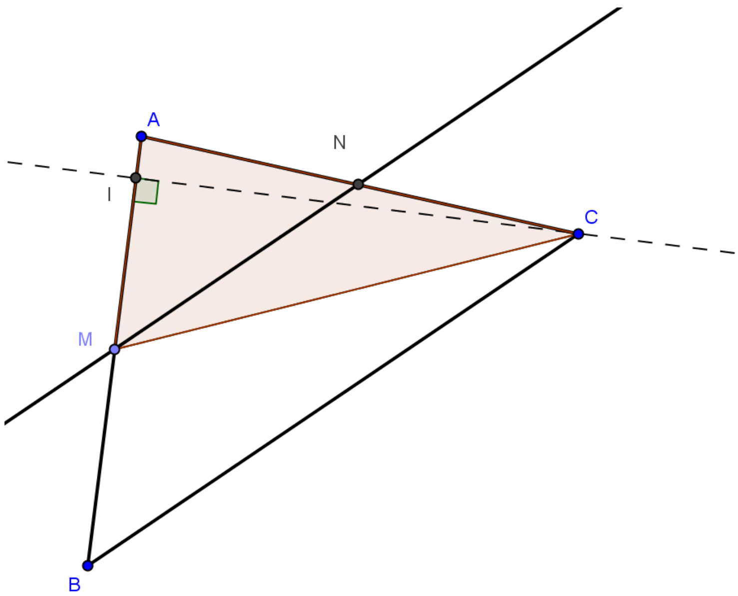
Et $A_{BNC} = \frac{BC \times NH}{2}$

Or on sait que (MN) et (FH) sont parallèles, (MF) et (FH) sont perpendiculaires et (NH) et (FH) sont perpendiculaires.
Donc MNFH est un rectangle.
Donc MF = NH.

On en déduit que : $A_{BMC} = A_{BNC}$.

Et donc $\boxed{A_{AMC} = A_{ANB} \quad (*)}$

<u>• Essayons d'exprimer A_{AMC} en fonction de AM.</u>
Pour cela on trace la hauteur [CI]

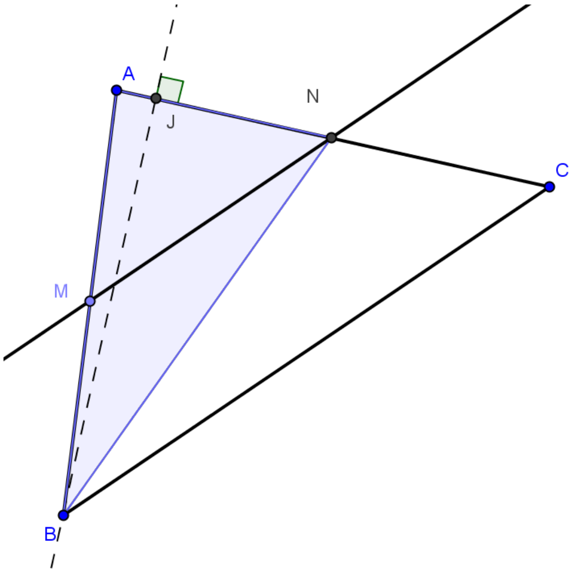


$A_{AMC} = \frac{CI \times AM}{2}$

On en déduit que $\boxed{\frac{A_{AMC}}{A_{ABC}} = \frac{\frac{CI \times AM}{2}}{\frac{CI \times AB}{2}} = \frac{AM}{AB} \quad (**)}$

• <u>Essayons d'exprimer A_{ANB} en fonction de AN.</u>

Pour cela on trace la hauteur [BJ]



$A_{ANB} = \frac{BJ \times AN}{2}$

On en déduit que $\boxed{\frac{A_{ANB}}{A_{ABC}} = \frac{\frac{BJ \times AN}{2}}{\frac{BJ \times AC}{2}} = \frac{AM}{AC} \quad (***)}$

• <u>Récapitulons nos résultats :</u>

Comme $A_{AMC} = A_{ANB}$ (*)

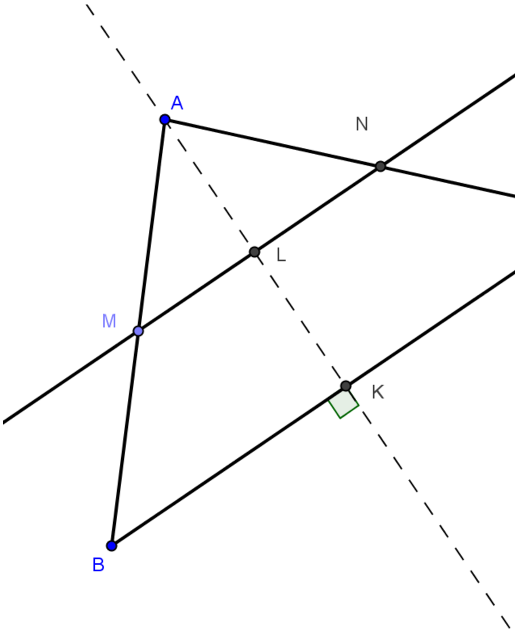
On peut dire que $\frac{A_{AMC}}{A_{ABC}} = \frac{A_{ANB}}{A_{ABC}}$

Et comme $\frac{A_{AMC}}{A_{ABC}} = \frac{AM}{AB}$ (**) et $\frac{A_{ANB}}{A_{ABC}} = \frac{AM}{AC}$ (***)

On en déduit que $\frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AC}$

Ouf ! La première égalité de notre théorème est démontrée !

• <u>Utilisons l'égalité que nous venons de démontrer:</u>

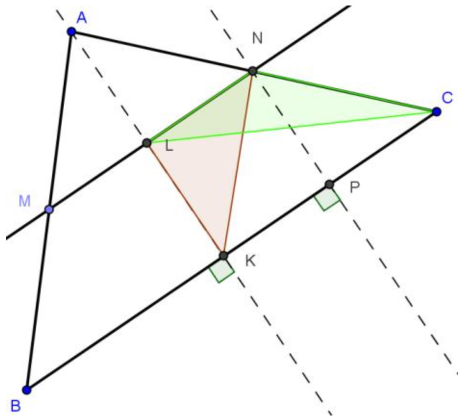


On trace [AK] une hauteur de ABC.
Si on utilise la première égalité du théorème de Thalès (démontrée précédemment) dans les deux triangles ABK et AKC (en considérant à chaque fois la sécante (MN)) on obtient les deux égalités suivantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AK} \ ; \ \frac{AL}{AK} = \frac{AN}{AC}$$

D'où :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AK} = \frac{AN}{AC} \quad (****)$$



LNPK étant un rectangle on a LK=NP.

On en déduit que $A_{LKN} = A_{LCN}$

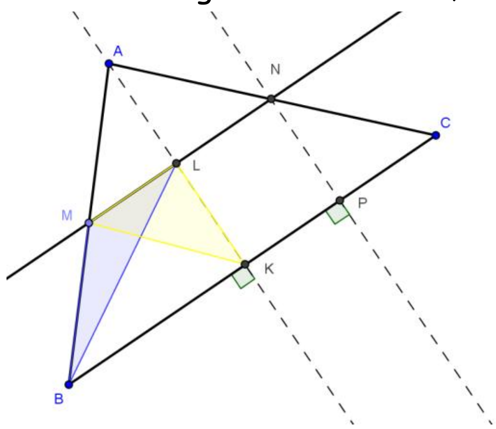
Et donc, en ajoutant A_{ALN}, que $A_{AKN} = A_{ALC}$

$A_{AKN} = \frac{NL \times AK}{2}$ et $A_{ALC} = \frac{KC \times AL}{2}$

Donc $NL \times AK = KC \times AL$

$$\boxed{\text{D'où } \frac{AL}{AK} = \frac{NL}{KC}}$$

En raisonnant de même dans les triangles ALB et AMK, on montre que :



$A_{ALB} = A_{AMK}$

$A_{ALB} = \frac{AL \times BK}{2}$ et $A_{AMK} = \frac{ML \times AK}{2}$

Donc $AL \times BK = ML \times AK$

$$\boxed{\text{D'où } \frac{ML}{BK} = \frac{AL}{AK}}$$

On en déduit que $\frac{ML}{BK} = \frac{AL}{AK} = \frac{NL}{KC}$

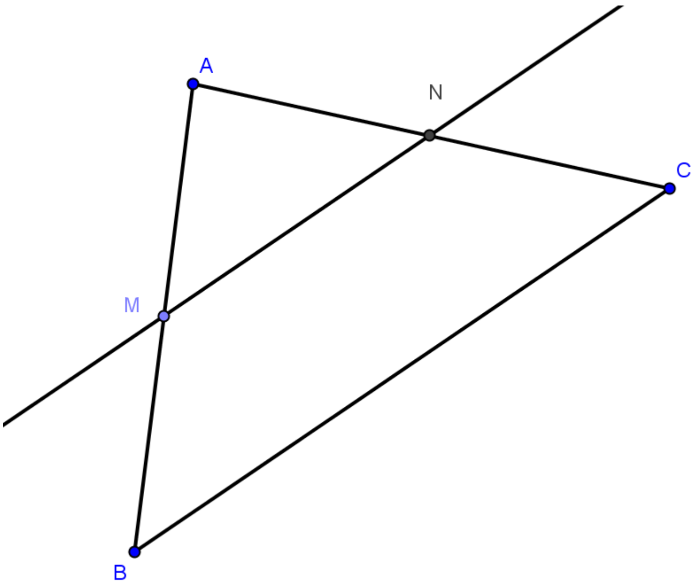
D'où $\frac{ML+NL}{BK+KC} = \frac{AL}{AK}$

En effet si a, b, c et d sont des nombres ($b \neq 0$ et $d \neq 0$) et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$

D'où $\frac{MN}{BC} = \frac{AL}{AK}$

Et donc avec (****) :

$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}}$$



Et voilà ! Euclide réalisait cette preuve environ 300 ans avant JC.