1 Introduction

La grève dans les transports, démarrée le 05122019, risque de durer et de me contraindre à ne pas venir (je ne suis pas gréviste, mais je suis dépendant des transports en commun).

Merci de répercuter dans votre cahier DE COURS, toujours à raison d'un "chapitre par page", ces documents. Vous pouvez ou bien les recopier (si vous estimez ça utile), ou bien indiquer le lien internet vers le présent document.

2 Irrationalité de la racine carrée de 2

2.1 Introduction

Toute la sous-section est une preuve.

2.2 Preuve

Certaines choses ne vont pas être justifiées. Par exemple, je vais ADMETTRE que toute fraction a la même valeur qu'au moins une fraction irréductible. Je vais aussi admettre que tout nombre impair est le successeur d'un nombre pair.

Calcul no1, 4ième de CLG: supposons que $(2x+1)^2 = 2y^2$. Alors (CLG)

$$1 + 2(2x^2 + 2x - y^2) = 0$$

Calcul no2, 4ième de CLG: supposons que $(2x)^2 = 2(2y+1)^2$. Alors (CLG)

$$1 + 2(2y^2 + 2y - x^2) = 0$$

Les deux calculs précédents, valant pour tous nombres x, y montrent que pour tous nombres x, y si x, y sont des nombres entiers alors si $x^2 = 2y^2$ alors si (x est impair ou y est impair) alors 1 est un nombre pair.

DONC si x, y sont des nombres entiers et $x^2 = 2y^2$ (comme 1 n'est pas un nombre pair) alors x, y sont tous les deux des nombres pairs.

Par ailleurs, CLG: $(\frac{x}{y})^2 = \frac{x^2}{y^2}$, ceci valant pour tous nombres x, y sauf pour $y = 0$.

On obtient le théorème suivant:
Soient p, q des nombres entiers avec q non nul.
Si $(\frac{p}{q})^2 = 2$ alors la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas une fraction irréductible.

L'argument ci-dessus montre que numérateur et dénominateur d'une fraction écrites avec des entiers dont le carré vaut 2 sont divisibles par 2.

Et finalement, on est arrivé à la conclusion que: **$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre qui peut s'obtenir en divisant un nombre entier par un nombre entier.**

3 Exercices

Prouver les parties CLG qui n'ont pas été détaillées

La partie qui suit n'a rien à faire dans le cahier de cours

4 Remarque

Ce théorème et au moins une de ses preuves ont été mis à votre programme à cause de l'histoire. En fait, il n'a rien de spécifique. Le phènomène qui est "profond" si j'ose dire est plus général et s'exprime comme suit (vous n'allez pas comprendre, il y a des mots savants):

Toute racine de tout polynôme unitaire à coefficients entiers, qui est dans $\mathbb{Q}$, est forcément dans $\mathbb{Z}$

Je ne vais pas "tout vous expliquer" dans ce théorème hors-programme, juste vous donner un exemple "générique". Un polynôme, ici, c'est juste une expression avec des x mis à des puissances positives et entières et additionnées et multipliées par des nombres fixes. Par exemple:

$$x \mapsto 3x^7 + 2x^3 + (-11)x + 3$$

Il est dit unitaire si le coefficient de la plus grande puissance de x dans l'expression est 1. Par exemple:

$x \mapsto x^2 + 6x^5 + 3x$ n'est pas unitaire puisque c'est 6 le coefficient de la plus grande puissance.
$x \mapsto x^9 + 6x^4 + 3x$ est unitaire puisque c'est 1 le coefficient de la plus grande puissance. En effet, cette expression est $x \mapsto 1x^9 + 6x^4 + 3x$

Un théorème que ceux qui continueront les maths verront un jour prouvé sous leurs yeux dit la chose suivante:

Si $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible alors il existe des nombres entiers u, v tels que $up + vq = 1$ et de plus pour tout entier positif n : $\frac{p^n}{q}$ est une fraction irréductible.

4.1 Preuve

Maintenant je prends un exemple: soit $f : x \mapsto x^5 + 10x^2 + 7x + 50$. Supposons que $\frac{p}{q}$ soit un antécédent de 0 par f avec $\frac{p}{q}$ fraction irréductible.

Ca donne que $\frac{p^5}{q^5} + 10\frac{p^2}{q^2} + 7\frac{p}{q} + 50 = 0$.

Donc CLG, $\frac{p^5}{q} + 10p^2q^2 + 7pq^3 + 50q^4 = 0$

Comme p, q sont des nombres entiers, il s'ensuit que $\frac{p^5}{q}$ est un nombre entiers. D'après le théorème, il existe des nombres entiers u, v tels que

$$up^5 + vq = 1$$

Donc $= u\frac{p^5}{q} + v = u\frac{p^5}{q} + v\frac{q}{q} = \frac{up^5+vq}{q} = \frac{1}{q}$, ce qui donne que $\frac{1}{q}$ est un nombre entier donc $q \in \{-1;1\}$ donc $\frac{p}{q}$ est un nombre entier.

4.2 Le polynôme unitaire qui produit $\sqrt{2}$

Ci-dessus, j'ai pris un exemple au hasard. Mais par exemple avec le polynôme unitaire $x \mapsto 1x^2 + (-2)$, vous obtenez que toute nombre rationnel dont le carré est 2 est obligé d'êrte un nombre entier. Avec le polynôme unitaire $x \mapsto 1x^2 + (-28)$, vous obtenez que toute nombre rationnel dont le carré est 28 est obligé d'être un nombre entier. Etc...

5 PGCD

Ci-dessus, j'ai évoqué le fait d'avoir ou de ne pas avoir de diviseur commun. Il y a un algorithme très simple qui en plus permet de faire tout ça automatique. A partir de 2 nombres entiers a, b, il calcule des entiers u, v, d, r, s tels que :

$$rd = a \; et \; sd = b \; et \; ua + vb = d$$

de sorte que non seulement d est un diviseur commun à a et à b, mais mieux, tous les diviseurs communs sont des diviseurs de d.

5.1 Voici l'algorithme:

Il lit (a, b) et écrit dans (u, v, d, r, s).

PGCD(Lire: a,b; Ecrire: u,v,d,r,s)
IF $a > b$ THEN
BEGIN $PGCD(b, a, u', v', d', r', s')$; u:=v'; v:=u'; d:=d'; r:=s';s:=r' END
ELSE
IF $a = 0$ THEN (u,v,d,r,s):= (0,1,b,0,1)
ELSE
BEGIN
PGCD(a,b-a,u',v',d',r',s')
d:=d'; u:=u'-v'; r:=r'; s:=s'+r'
END
END

5.2 Remarque (récursivité)

Mathématiquement, on a l'impression que cet algo n'a pas de sens car il prétend définir PGCD en supposant connu PGCD. Je vous invite à exécuter à la main PGCD(3,2) pour voir ce que ça fait.