1 Prérequis officiels

Fonction, ensemble de définition, image, antécédent, courbe représentative

Précision: << $dom(f)$ >> est une abréviation (dans ce document) de << ensemble de définition de f >>

2 Vocabulaire

1/ << u est une suite>> est une abréviation de << u est une fonction dont l'ensemble de définition est un segment final de $\mathbb{N}$ >>

2/ << X est un segment final de $\mathbb{N}$ >> est une abréviation de << il existe un nombre $a \geq 0$ tel que $X = \mathbb{N} \cap [a, +\infty[$>>

3/ << u est une suite arithmétique de raison r >> est une abréviation de << u est une suite ET pour tout $n \in dom(u) : u(n+1) = u(n) + r$ >>

4/ << u est une suite géométrique de raison r >> est une abréviation de << u est une suite ET pour tout $n \in dom(u) : u(n+1) = u(n) \times r$ >>

5/ (Private Joke entre profs de maths, ne surtout pas lire ce point5). << u est une suite arithmético-géométrique >> est une abréviation de << u est une suite ET il existe des nombres a, b tels que pour tout $n \in dom(u) : u(n+1) = a \times u(n) + b$ >>

3 Important, confusion à éviter

1/ En général, les suites arithmético-géométriques ne sont ni arithmétiques ni géométriques

2/ Une tradition maladroite fait que la notation u_p remplace souvent la notation $u(p)$, pouvant faire oublier qu'une suite u est une fonction et que u_p est l'image de p par u.

3/ Une autre tradition, elle plus que maladroite, carrément fautive, utilise un lieur de variable sans répétition de la variable (c'est LA FAUTE par excellence en maths), et donc remplace u par (u_n). C'est un abus de langage qui provient de la notation correcte, mais non utilisée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou encore $(u_n)_{n \in A}$. En fait, la suite u s'appelle tout simplement u, épiCtou

4/ Finalement, tout ceci vous concerne assez peu (ES, STMG). Les exercices tentent généralement d'être suffisamment redondant pour que les ambiguités ci-dessus signalées n'aient pas d'effet trop délétère. En cas de confrontation à une ambiguité, consultez le présent document.

5/ u_n est appelé << un terme de la suite u >>. L'expression <<premier terme de la suite u >> abrège <<image par u du plus petit élément de $dom(u)$ >>. En pratique c'est souvent u_0 ou u_1 selon que $dom(u) = \mathbb{N}$ ou $dom(u) = \mathbb{N}^*$.

4 Axiome

Un axiome extrêmement célèbre intervient sans cesse dans le thème des suites. Il a plusieurs énoncés équivalents, je vous en liste de nombreux, mais ce n'est pas exhaustif. La plupart d'entre eux, vous y croyez vous-même depuis le CE2 (au langage près et sans en être conscient).

4.1 Théorème

Les énoncés qui suivent sont tous équivalents:

1/ Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément
2/ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément
3/ Pour toute partie A de $\mathbb{N}$, si $0 \in A$ et $(\forall n \in \mathbb{N} : [n \in A \Rightarrow (n+1) \in A])$ alors $A = \mathbb{N}$
4/ Pour toute suite u arithmétique de raison r, et tous entiers n, p dans $dom(u) : u_n = u_p + r \times (n-p)$
5/ Pour toute suite u géométrique de raison r, et tous entiers n, p dans $dom(u) : u_n = u_p \times r^{(n-p)}$

6/ Pour toute suite u, u est croissante ssi (pour tout $n \in dom(u) : u(n+1) \geq u(n)$)

7/ Pour toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$, et tout nombre a, il existe au moins une suite u telle que $u(0) = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u(n+1) = f(u(n), n)$

8/ Pour toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$, et tout nombre a, il existe au plus une suite u telle que $u(0) = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u(n+1) = f(u(n), n)$

4.2 Remarque

J'ai ajouté ça pour honnêteté intellectuelle. Personne ne vous embêtera avec ça. Par contre sachez que parfois, des choses fausses sont affirmées par le cours lycéen de Terminale, comme par exemple *le principe de récurrence est nouveau en Terminale, vous ne l'avez pas admis avant* etc

La seule chose qui compte pour vous et que vous savez déjà au fond de vous est (7) et (8), ainsi que (6) avec 4 déclinaisons. Mais chaque fois les exercices sont ULTRACONCRETS.

La programmation générique de l'unique suite u obtenue via les affirmations 7 et 8, l'image qu'elle donne à n à partir de a et f est :

```
begin
s := a;
p := 0;
while p < n do
    begin
    s:=f(s,p);
    p:=p+1;
    end;
renvoyer s en déclarant que c'est u_n
end
```

5 Pour les comères

Depuis plus de 15ans et probablement jusqu'à la session du bac juin 2020 math ES, tous les ans 5 points sont offerts avec le même exercice. Je ne sais pas si en STMG, il y a une offre similaire.

5.1 Voici l'exercice:

1/ on introduit une suite arithmético-géométrique avec un roman feuilleton usuel. Vous vous retrouvez donc avec a, b, u tels que $\forall n : u_{n+1} = au_n + b$.

2/ Quelques questions vous demandent de justifier les valeurs prétendues pour a, b et/ou de calculer u_1, u_2 (ça peut aller jusqu'à u_4

3.1/ Des questions enchainées vous demandent finalement de faire la remarque (classe de 5e) que si $ak = b + k$ alors $\forall n : u_{n+1} + k = au_n + b + k = au_n + ak = a(u_n + k)$

3.2/ Souvent le k est donné, mais il peut arriver qu'il vous faille le trouver. Il n'y a pas le "si" que j'ai écrit ci-dessus, car le k est DEJA choisi (ou trouvé) tel que $ak = b + k$

4/ Le sujet va donner un nom à $n \mapsto u_n + k$ (généralement v), vous demander d'exprimer directement par une formule v_n en fonction de n en remarquant que v est une suite géometrique de raison a (vous répondrez donc $v_n = v_0 \times a^n$)

5/ Ca vous donnera donc que $u_n + k = (u_0 + k) \times a^n$. Et comme l'exo a dit qui était u_0 êt k, on va, par exemple, vous demander de calculer u_9 en quelques secondes, et vous répondez que c'est $(u_0 + k) \times a^9 - k$

Et il vous (candidat de ES 2005-2020) restera 3 autres exercices pour tenter d'ajouter aux 4 ou 5 points marqués des points supplémentaires à l'épreuve du bac. Je ne serais pas tellement étonné qu'une version similaire soit pérenne en STMG, mais je n'ai pas encore regardé les annales STMG.