1 Introduction et mode d'emploi

Attention, ce cours théorique ne distingue pas entre première S et ES au niveau des contenus. Il vous appartient, quand vous êtes en ES de vous apercevoir des chapitres qui ne sont pas pour les ES. C'est très simple : la géométrie, les vecteurs.

La Terminale n'attend de vous que les choses suivantes (dont beaucoup ne sont pas issues de la première) :
1/ Avoir les bases de calculs des classes du CP à la 5ième
2/ Accepter de manipuler des lettres (appelées à tort variables) dans tous les sens
3/ Etre sincère dans vos raisonnements (peu de points sont donnés aux hors-sujet et récitations de corrigés tout faits)
4/ Accepter de travailler avec des fonctions
5/ Savoir manipuler des suites et se montrer créatif quand on vous demande de faire un petit programme qui va obliger la machine à résoudre un problème à votre place

J'écris ce doc avec un logiciel sans couleur. Les stats et l'échantillonnage (qui ne posent aucun problème aux élèves) ne sont pas présentes dans ce cours). Mathcommun contient les 120 DST donnés chaque année (3 fois 40 par classe environ et en exagérant un peu) ainsi que tous les liens vers les animations geogebra.

Je vous rappelle que les lacunes en maths n'existent pas et que les élèves qui ont des notes inférieures à 17 sont ceux qui EN SAVENT TROP. Lesdits inventent des règles fausses pour résoudre les exercices (de manière fausse), et donc, non seulement ne progressent pas, même en travaillant, mais en plus se rendent presque complètement hermétiques à un enseignement même correct, même dénué de pollution pédagogique, car les vérités mathématiques (qui tiennent sur quelques pages du CP à la TS spécialité) ne pèsent plus rien face aux milliers de connaissances fausses et inventées par les élèves en difficulté pour esquiver le fait de ne rien écrire. Cette attitude devient une habitude et au bout de quelques années d'étouffement pédagogique avec des règles fausses et des milliers d'inférences mémorisées fausses, les élèves tombés dans ce travers ne sont même plus consients qu'ils sont hors-sujet : ils pensent peiner, pensent manquer de connaissaces, donc s'enfoncent encore plus. C'est un boucle infernale sans fin. Je fais mon possible pour vous décontaminer, mais ce n'est pas facile, beaucoup ont tendance à penser que les priver de connaissances est une action hostile et non pas aidante. Beaucoup se "<sentent rassurés"> (c'est comme une drogue) quand ils écrivent des centaines de pages inutiles, et finalement pensent que l'occupationnel mis en place par les autres enseignants pour acheter la discipline comportementale et avoir du calme serait "<du contenu à mémoriser">.

2 Abréviation

0/ <<ssi>> est une abréviation de << si et seulement si >>
1/ x_{Toto} abrège << abscisse de Toto >>
2/ y_{Toto} abrège << ordonnée de Toto >>
3/ L'asbscisse du couple (x, y) est x et son ordonnée est y.
4/ Axiome : deux couples sont égaux si et seulement si ils ont même abscisse ET même ordonnée

2.1 Phénomènes d'héritages

Quand des opérations s'appliquent habituellement à des nombres et qu'on les utilise avec des fonctions, il est sous-entendu un << $x \mapsto$>> devant ou un << $\forall$ >> devant. Exemple : << f est positivie sur A >> abrège << $\forall x \in A : f(x) \geq 0$ >> et << f/g >> abrège << $x \mapsto ((f(x))/(g(x)))$ >>, et f^2 abrège $x \mapsto [(f(x))^2]$

2.2 Langage CAML (un peu remixé)

Les instructions écrites en anglais sont en fait des définitions caml. Je vous donne les plus utilisées.

1/ let <<a := blabla>> me permet d'abréger. Par exemple (let $a := 5$ in $3 \times a) = 15$
2/ Quand a est vrai, (if a then b else $c) = b$
3/ Quand a est faux, (if a then b else $c) = c$

2.3 Rappel des connecteurs logiques

4/ $u = v$ abrège << tout ce qui arrive à u arrive aussi à v
5/ << X et Y>> abrège <<if X then Y else FAUX>>

6/ << X ou Y>> abrège <<if X then VRAI else Y>>
7/ << *non X* >> abrège << if X then FAUX else VRAI>>
8/ << si X alors Y>> abrège <<if X then Y else VRAI>>
9/ <<X sans Y >> abrège << X et $nonY$ >>
10/ << $\forall x$: *blabla* >> abrège << tous les objets peuvent dire sans mentir la phrase obtenue en remplaçant la lettre au pied du signe $\forall$ par "<moi"> dans *blabla* >>

Remarque : au lieu de $\forall x$: *blabla*, on dit souvent << pour tout x : *bblabla* >>.

3 Réservé aux 1ES, pourcentages

Les journalistes, économistes, etc, parlent avec une langue à eux qui n'est pas celle des maths. voici les traductions :
1/ x augmenté de y se traduit par x multiplié par $(1+y)$
2/ x de y se traduit par $x \times y$
3/ Proportion de blabla parmi les patatita se traduit par *nombre de blabla qui sont patatita divisé par nombre de patatita*
4/ % se traduit par <<centième(s)>>
5/ x diminué de y se traduit par x augmenté de $(-y)$
6/ Le coefficient multiplicateur pour passer de u à v se traduit par v divisé par u
7/ Le taux d'évolution de blabla se traduit par le coefficient multiplicateur de blabla MOINS 1

Remarque : le passage d'un nombre à un autre s'appelle une évolution et plusieurs évolutions enchainées ont même effet qu'une évolution dont on obtient le CM en multipliant les CM intermédiaires. L'évolution réciproque de celle qui passe de x à y est celle qui passe de y à x. Les CM d'une évolution et de sa réciproque sont inverses l'un de l'autre. **Attention, vous connaissez le vocabulaire journalistico-économico-blabla depuis la cinquième et les effets numériques depuis le CE1, ce chapitre ne vous apprend rien, il se contente de vous faire réviser ces notions de base**

4 Second degré

Je note provisoirement $E(a,b,c)$ l'équation $[ax^2+bx+c=0; \textit{inconnue } x]$, dont j'abrège aussi par $S(a,b,c)$ dans ce paragrpahe l'ensemble des solutions $\{x \in IR \mid ax^2+bx+c=0\}$. Je note provisoirement $f : x \mapsto ax^2+bx+c$. Il est attendu de vous les connaissances suivantes :

SD1/ Pour tout $a \neq 0, b, c, d : S(a,b,c) =$ let $\Delta := b^2-4ac$ in if $\Delta \geq 0$ then let $r := \sqrt{\Delta}$ in $\{(-b-r)/(2a); (-b+r)/(2a)\}$

SD2/ La courbe de f s'appelle une parabole (sauf si $a=0$) et son sommet est son point qui a la plus [if $a>0$ then petite else grande] ordonnée, ledit sommet ayant comme abscisse $-b/(2a)$ et se trouvant au milieu des éventuels antécédents de d par f.

SD3/ Les tableaux de signes et de variation de f (voir livre)

SD4/ Le théorème de factorisation : si $S(a,b,c) = \{u;v\}$ et $a \neq 0$ alors $\forall x \in IR : f(x) = a(x-u)(x-v)$

SD5/ Que vous sachiez montrer que vous ne récitez pas, mais que vous comprenez de quoi vous parlez quand on vous montre des paraboles.

SDVoc/ : l'écriture $x \mapsto a(x+b)^2+c$ s'appelle *écriture sous forme canonique*, l'écriture $x \mapsto ax^2+bx+c$ s'appelle *écriture sous forme développée* et l'écriture $x \mapsto a(x+b)(x+c)$ s'appelle *écriture sous forme factorisée*.

5 Suites très particulières

Je vous rappelle la définition : << u est une suite>> abrège u est une fonction dont l'ensemble de définition est $I\!N$. au lycée, vous n'avez affaire qu'à des suites dites "<numériques"> (avant la Terminale), c'est à dire des suites u telles que $\forall n \in I\!N : u_n \in IR$.

Ce chapitre vous rappelle des bases du CE1 qui ne vous ont jamais été prouvées. D'abord vocabulaire :

$<<$ u est une suite arithmétique de raison r $>>$ abrège $<<$ u est une suite et $\forall n \in I\!N : u_{n+1} = r + u_n$ $>>$.

Lorsqu'on vous a appris le mot multiplication, en fait, on vous a appris que si u est une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers n, p : on obtient u_n en ajoutant $(n-p)$ fois r à u_p. Faites bien attention de ne pas apprendre par coeur ça, mais plutôt de bien prendre conscience que vous le savez déjà depuis l'âge de 7ans environ

$<<$ u est une suite géométrique de raison r $>>$ abrège $<<$ u est une suite et $\forall n \in I\!N : u_{n+1} = r \times u_n$ $>>$.

Lorsqu'on vous a appris le mot puissance, en fait, on vous a appris que si u est une suite géométrique de raison r alors pour tous entiers n, p : on obtient u_n en multipliant u_p par (r à la puissance $(n-p)$). Faites bien attention de ne pas apprendre par coeur ça, mais plutôt de bien prendre conscience que vous le savez déjà depuis l'âge de 12ans environ.

6 Astuces célèbres réservé aux 1S

1/ Si $S = 1+2+3+\ldots+n$ alors $S+S = (1+n)+(2+(n-1))+\ldots+((n-1)+2)+n+1$ donc $S = n\times(n+1)/2$
2/ Si $S = 1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n$ alors $aS = a+a^2+\ldots+a^n+a^{n+1}$ donc $S = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

7 Variation de suites

Les 5 théorèmes qui suivent sont, chacun, équivalents à l'axiome de récurrence, qui ne vous est présenté qu'en Terminale.
T1/ Soit u une suite. Alors u est croissante ssi $[\forall n \in I\!N : (u(n+1) \geq u(n))]$
T2/ Soit u une suite. Alors u est décroissante ssi $[\forall n \in I\!N : (u(n+1) \leq u(n))]$
T3/ Soit u une suite. Alors u est strictement croissante ssi $[\forall n \in I\!N : (u(n+1) > u(n))]$
T4/ Soit u une suite. Alors u est strictement décroissante ssi $[\forall n \in I\!N : (u(n+1) < u(n))]$

8 Convergence de suites réservé aux 1S

Soit u une suite. L'expression $<<$ u converge vers a $>>$ abrège $<< \forall e > 0 : (\{n \in I\!N \mid u(n) \notin]a-e, a+e[\}$ est fini) $>>$
Théorème : toute suite géométrique dont la raison est dans $]0,1[$ converge vers 0

9 Curiosité de musée, parmi les fonctions

Un chapitre de votre programme demande que vous soyez familiers avec les fonctions célèbres suivantes :

1/ $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0, +\infty[$, strictement croissante sur $I\!R$, et dont il vous est demandé de connaitre la courbe (qui est l'ensemble des points pouvant dire sans mentir $<<$ mon ordonnée est positive et son carré vaut mon abscisse$>>$. Lors du sondage j'ai vu que certains d'enrte vous confondent avec la fonction carrée, attention, ça la fout mal dans les dîners en ville (ou alors faites croire à vos interlocuteurs que vous étiez en L).

2/ La fonction *valeur absolue* $x \mapsto |x|$ où $\forall x \in I\!R : |x| :=$ if $x > 0$ then x else $(-x)$

L'une des grandes traditions de la classe de première S consiste à voir ceux qui savent se débrouiller seuls en leur demandant de résoudre des équations ou inéquations du genre suivant : $[|2x+3| - |7x-1| > 3x; \mathit{inconnue}\ x]$. Il n'y a pas de méthode toute faite, c'est du niveau de fond 6ième, mais ça permet de voir qui sait disposer pendant longtemps ses différentes études de cas. Ce genre d'exercice, facile, mais exigeant 20mn, est une véritable punition.

Il est attendu de vous que vous connaissiez par coeur sa courbe!!

10 Dérivées

Le programme est incohérent car demande de définir le nombre dérivée par une limite et interdit à la ligne juste en dessous de définir ce que signifie le mot "<limite">.

Je vous dispense donc de ces tergiversations, vous êtes invités à bien contempler le lien geogebra et à considérer que la notion de *tangente à une courbe en un point* est une notion première non définie (il y a un document que je vous lie qui entre techniquement dans les détails pour ceux qui veulent approfondir). Une fois ça accepté, la suite est très courte :

1/ On utilise (c'est traitre, le signe est tout petit, je vais essayer d'écrire gros) l'abréviation $\Huge f'$ pour abréger la fonction suivante :
$x \mapsto$ pente de la tangente à la courbe de f au point de cette courbe qui a x comme abscisse (et donc $f(x)$ comme ordonnée)

2/ f' s'appelle *la dérivée de* f. Son ensemble de définition est inclus dans celui de f, mais n'a pas a priori de raison de lui être égal.

3/ La notion de dérivée est enseignée au lycée à cause des théorèmes suivants, valables pour toute fonction f et intervalle J tels que la dérivée de f est définie sur J :

T1/ si f' est positive sur J alors f est croissante sur J
T2/ si f' est négative sur J alors f est décroissante sur J
T3/ si f est croissante sur J alors f' est positive sur J
T4/ si f est décroissante sur J alors f' est négative sur J
T5/ si f' est strictement positive sur J alors f est strictement croissante sur J
T6/ si f' est strictement négative sur J alors f est strictement décroissante sur J
T7/ Si f est dérivable en a et atteint un extremum en a sur un intervalle $]u,v[$ qui contient a alors $f'(a)=0$

Ces théorèmes vous permettent de remplacer la recherche des variations de f par la recherche du signe (activité de collège sur le fond, expression par des tableaux de signes en seconde) de f', puis d'appliquer automatiquement T5 et T6 pour faire des flèches qui montent et descendent.

A ce propos la consigne *étudier les variations de f* abrège la longue consigne : << *tout d'abord, veuillez dériver f ; puis faites le tableau de signes de f', puis inférez-en dans le même tableau les variations de f* >>

11 Rappel de seconde sur les droites

Pour tout nombre a, b, c l'ensemble d'équation $[ax+by+c=0]$ est une droite si et seulement si $(a,b) \neq (0,0)$. Cette disposition s'appelle souvent << équation cartésienne>> (alors que l'équation de droite $[y=ax+b]$ s'appelle plutôt *équation paramétrique*)

Un théorème célèbre (enfin c'est un remix de Thalès) dit que pour tout d : si d est une droite qui n'est pas verticale alors il existe un nombre p que l'on appelle << pente de d >> tel que pour tous points différents A, B de d : $y_A - y_B = p \times (x_A - x_B)$ (on écrit parfois $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = p$)

Deux droites sont parallèles ssi elles sont toutes les deux verticales ou ont la même pente.

Si $b \neq 0$ alors la pente de la droite d d'équation $[ax+by+c=0]$ est $(-a)/b$, sinon d est verticale d'équation $[ax+c=0]$ (c'est à dire qu'elle est l'ensemble des points dont l'abscisse est $(-c)/a$)

La droite d'équation $[y - y_A = m \times (x - x_A)]$ est la droite de pente m qui passe par A

Si $A \neq B$ sont des points alors la droite d'équation $[(x-x_A)(y_B-y_A) = (x_B-x_A)(y-y_A)]$ est une (et donc la seule) droite qui passe à la fois par A et par B

12 Retour sur la dérivation

Valable pour tous s, f dérivable en s, le rappel de seconde sur les droites vous permet donc de dire que la droite $[y - f(s) = f'(s) \times (x - s)]$ est la tangente (quand elle existe) à la courbe de f au point $(s, f(s))$

13 Formules de dérivation

Les théorèmes suivants permettent (aux ensembles de définition près) de dériver n'importe quelle fonction usuelle, robotiquement. Ils valent pour toutes fonctions a, b constantes et fonctions f, g.

1/ dérivée d'une somme (resp différence) de fonctions = somme (resp différence) des dérivées des fonctions
2/ $(fg)' = f'g + fg'$
3/ $(f/g)' = (f'g - fg')/(g^2)$
4/ $(f^a)' = af' \times f^{a-1}$
5/ $(x \mapsto ax + b)' = (x \mapsto a)$
6/ $(x \mapsto f(g(x)))' = (x \mapsto g'(x) \times f'(g(x)))$
7/ $(af)' = af'$
8/ $(\sqrt{\ })' = (x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}})$
9/ $(a/f)' = (-a)f'/f^2$

13.1 Exercice pour les motivés

Déduire les 6 à 9 des 1 à 5.

14 Produit scalaire réservé aux 1S

14.1 analytiquement

Soit R un repère (il suit que tout point du plan a un couple de coordonnées, ainsi que tout vecteur). Soient des vecteurs u, v. Je note $ProdSca(u, v, R)$ le nombre suivant :

$$ProdSca(u, v, R) := x_u x_v + y_u y_v$$

Remarque : si le repère R "<se croit"> orthonormé, il estimera que la longueur des flèches qui représentent u, notée $||u||$ et appelée *norme de* u, s'obtient en considérant que c'est un nombre positif et que $||u||_R^2 = x_u^2 + y_u^2$. Ce n'est ni plus ni moins que le théorème de Pythagore!! Et si R est vraiment orthonormé et ne se ment pas à lui-même, alors il aura raison. On obtient donc la paraphrase : $||u||_R$ mis au carré est égale à $ProdSca(u, u, R)$

Cette notion est au programme de lycée car on a le théorème époustouflant suivant :

Quelques soient les repères R, S, s'ils perçoivent les longueurs de la même façon, alors pour tous vecteurs u, v : $ProdSca(u, v, R) = ProdSca(u, v, S)$

On l'a déjà presque prouvé en classe. On a donc mis en place une tradition. On n'écrit plus R et on utilise un petit point. Autrement dit, on considère que l'unité de longueur est décidée une fois pour toutes, que les angles droits sont imposés par la Nature et que tous les repères orthonormés sont à ces restrictions près d'accord sur les longueurs, on choisira un repère orthonormé une bonne fois pour toutes et on note :

$$u.v := ProdSca(u, v, R)$$

Je vous rappelle les théorèmes de calcul (facile à VERIFIER avec le niveau cinquième), valables pour tous vecteurs u, v, w et tout nombre a :

1/ $u.(v + w) = (u.v) + (u.w)$

2/ $(au).v = a \times (u.v)$
3/ $u.v = v.u$

Dont vous pouvez vite déduire que $(u+v).(u+v) = u.u + u.v + v.u + v.v$ et donc que :

$$2(u.v) = ||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2$$

qui prouve le théorème époustouflant d'invariance annoncé, puisque cette formule montre qu'il suffit de connaître les longueurs du triangle ABC pour connaitre $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$: en effet, la formule dit (tenant compte de la relation de chasles) :

$$2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AC^2 - AB^2 - BC^2$$

14.2 Angles droits

Dans cette section, provisoirement, je suppose le repère fixée (orthonormé), et je désigne les vecteurs par leur couple de coordonnées. << u, v sont orthogonaux>> abrège << les flèches qui représentent u, sont perpendiculaires aux flèches qui représentent v >>

Je pense que vous serez tous d'accord que le vecteurs $(-y, x)$ est orthogonal au vecteur (x, y) (on a tourné d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) et de même si on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, on obtient que $(y, -x)$ est orthogonal à (x, y)

En classe de seconde vous avez appris que (x, y) et (x', y') sont colinéaires ssi $xy' = x'y$

Pour être orthogonal au vecteur (x, y) il suffit d'être colinéaire au vecteur $(-y, x)$ (Base de l'école primaire, ayant accepté ci-dessus), d'où :

Théorème : (x,y) et (a,b) sont orthogonaux ssi $xa + yb = 0$

qui, en français dit que **deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul**

14.3 Lien entre produit scalaire et trigonométrie

Un repère orthonormé est fixé une fois pour toutes. <<cerlce trigonométrique>> abrège <<cercle de rayon 1 dont le centre est l'origine du repère>>. On appelle "<sens"> trigonométrique le fait de tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, c'est à dire, quand on part de $(1, 0)$ de passer par $(0, 1)$ avant de passer par $(0, -1)$.

<< $(cos(x), sin(x))$ >> abrège << point où on arrive en partant de $(1, 0)$ et en tournant dans le sens trigonométrique, puis en s'arrêtant une fois avoir parcouru la distance x. Par exemple $(cos(2\pi), sin(2\pi)) = (1, 0)$), puisque on a alors fait un tour complet.

<< u est un vecteur unitaire>> abrège << $||u|| = 1$ >>.

Soient u, v deux vecteurs. Il y a une homonymie volontaire : << $cos(u, v)$ >> abrège << $u.v/(||u|| \times ||v||)$ >>. Je vous laisse réfléchir pourquoi on utilise le même mot "<cos"> dans deux contextes différents.

Soient u, v deux vecteurs unitaires, de coordonnées $(cos(a), sin(a))$ pour u et $(cos(b), sin(b))$ pour v. Le théorème époustouflant d'invariance dit que on obtiendra le même produit scalaire si on tourne le repère pour obtenir que la nouvelle coordonnée de u soit $(1, 0)$ et celle de v soit $(cos(b-a), sin(b-a))$. Par conséquent :

$$cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b) = cos(b-a)$$

car $1 \times cos(b-a) + 0 \times sin(b-a) = cos(b-a)$.

14.4 Calcul du PS avec une projection

Soient A,B,C,D des points tels que A, B sont différents et D sur (AB) et $C \neq D$ et $(CD) \perp (AB)$. Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB}\overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}) + 0$. Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} =$ au nombre qu'on trouve en multipliant les longueurs des flèches et en adaptant le signe soigneusement.

14.5 Equation de cercle

D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, l'ensemble d'équation $[(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = r^2]$ est le cercle de rayon r et de centre A. Un exercice assez courant et type en 1S consiste à vous donner un ensemble d'équation $[ax^2+bxy+cy^2+d=0]$ et à vous demander si oui ou non, c'est un cercle et si oui d'identifier centre et rayon.

14.6 Vecteur normal à droite

$<<$ le vecteur u est normal à la droite $d >>$ abrège $<< u$ est un vecteur directeur des droites qui sont perpendiculaires à $d >>$

(a, b) est un vecteur normal à la droite d'équation $[ax + by + c = 0]$

$(-b, a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $[ax + by + c = 0]$

Curieusement ce sont les vecteurs normaux qui sont les plus faciles à retenir comme vous le constatez.

15 Proba partie V.A.

En plus de la classe de seconde, la classe de 1S ajoute la notion de *variable aléatoire*. Ce mot savant ne désigne rien d'autre qu'une fonction (souvent notée avec une lettre majuscule, X, Y, Z, etc) définie sur l'univers, ie l'ensemble des issues. On l'appelle ainsi parce qu'on imagine qu'on tire au sort une issue i et qu'on affiche la valeur $X(i)$ (ie l'image de i par X.

L'espérance de X, notée $E(X)$ est la somme des nombres $(X(i) \times proba(\{i\}))$ quand i parcourt l'univers probabilisé.

La **monde physique** (et non pas comme le disent trop souvent les gens, et même les pros, qui se trompent à ce sujet) semble respecter un slogan vague qui s'appelle *la loi des grands nombres*. Il dit que si on répète très souvent la MEME expérience, les répétitions étant indépendantes avec la même V.A. X on obtiendra en moyenne à peu près le nombre $E(X)$. Les théorèmes de maths concernant la loi des grands nombres mettent en hypothèses ce qu'il veulent prouver et ne concernent pas le monde physique. Le respect apparent de cette loi n'a AUCUNE explication dans la physique classique, il faut aller chercher les fondements quantiques pour le comprendre. Beaucoup de gens se trompent en disant que le chaos déterministe engendre les apparences du vrai hasard. Ceci est une erreur courante, mais de toute façon, ça ne concerne pas les études lycéennes.

La loi de X est la fonction $v \mapsto Proba(\{i \in Univers \mid X(i) = v\})$ (en Terminale vous préférerez $v \mapsto Proba(\{i \in Univers \mid X(i) \leq v\})$

15.1 Proba Partie Bernoulli

J'utilise un exemple générique, pour gagner du temps : le lancer d'une pièce pas forcément équilibrée qui a une probabilité p de tomber sur FACE. On va la lancer n fois. Les lancers n'ont aucune raison de s'influencer, on va supposer qu'ils sont indépendants (sans dire ce que veut dire "<indépendant"> tout de suite).

Ce protocole s'appelle un *schéma de Bernoulli de paramètre* (n, p). A votre programme, on vous demande de savoir que la probabilité d'obtenir k FACE et $(n-k)$ PILE est le nombre :

$$\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{(n-k)}$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ désignant $card(\{X \mid X \subset \{1;..;n\}$ et $card(X) = k\})$. Ce nombre se trouve en dessinant un triangle de Pascal ou en tapotant sur la calculette.

Soit X la V.A. qui à chaque expérience d'un schéma de Bernoulli de paramètre (n, p) associe le nombre de FACE obtenus. Alors $E(X) = p \times n$

16 Qu'est-ce que les maths

Il y a deux notions importantes. La << vérité mathématique>> et l'obligation de prouver ce qu'on dit.

16.1 Vérité

Dans ce contexte, personne n'a été désigné comme ayant la charge de la preuve. Pour se départager 2 personnes qui sont **en désaccord** sur une phrase doivent se livrer à la partie suivante. J'appelle VRAI le joueur qui prétend que la phrase est vraie et FAUX celui qui prétend que la phrase est fausse. La suite décrit comment on décompose la phrase en jouant des coups :

1/ $[\forall x : A] \to$ c'est FAUX qui joue, on supprime le $\forall x$ de gauche, puis il remplace x par CE QU'IL VEUT partout où la lettre x apparait dans A, puis la partie continue avec la phrase A' ainsi obtenue. Attention, il doit remplacer partout x par le même objet.
2/ $[A \ ou\ B] \to$ c'est le joueur VRAI qui joue. Il choisit l'un des deux phrases A, B et on continue la partie avec elle
3/ $[\exists x : A] \to$ c'est VRAI qui joue, on supprime le $\exists x$ de gauche, puis il remplace x par CE QU'IL VEUT partout où la lettre x apparait dans A, puis la partie continue avec la phrase A' ainsi obtenue. Attention, il doit remplacer partout x par le même objet.
4/ $[A \ et\ B] \to$ c'est le joueur FAUX qui joue. Il choisit l'un des deux phrases A, B et on continue la partie avec elle
5/ $[non(A)] \to$ on intervertit les rôles (le joueur FAUX devient le joueur VRAI et vice versa), puis on continue avec A
6/ Phrase atomique : on l'nanalyse, si elle est vrai le gagnant est VRAI et sinon c'est FAUX

Il arrive parfois qu'au lieu de $\forall x$: ou de $\exists x$:, on ajoute une condition imposée au joueur, par exemple $\forall x > 0$:.

Une fois la partie accomplie et le gagnant déclaré, on considère que la phrase a la valeur que le gagnant prétendait avant la partie. Evidemment, ce jeu n'est utile que si deux personnes sont sur une ile déserte. C'est un principe actifPAR DEFAUT quand vraiment personne ne veut avoir la charge de la preuve

16.2 Preuves

Quand une personne accepte d'avoir la charge de la preuve, elle doit prouver pour défendre sa position que non seulement elle gagne au jeu précédent, mais surtout qu'elle gagnerait quel que soit son adversaire. Elle n'a aucun droit, son adversaire, le SCEPTIQUE peut toujours lui demander pourquoi. Par contre, si le prouveur refuse de justifier quelque chose, il peut faire valoir un joker en disant que telle affirmation dans telle étape est une HYPOTHESE. Dans ce cas, le sceptique est obligé de d'accepter.

17 Définition formelle de la dérivée réservé 1S, annexe HP

On joue avec des nombres réels. Soit f une fonction. La phrase $<< f'(a) = b >>$ est une abréviation de la phrase suivante :

$$\forall e > 0 \exists u > 0 \forall h \neq 0 : (h \notin]a-u, a+u[\ ou\ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in]b-e, b+e[)$$