

# 1 Attention

Ce pdf contient la correction des exercices qui nécessitent une petite inspiration, ne le lisez donc pas. Je le mets pour que les élèves "désespérés de ne pas trouver" puissent le voir comme un aspirine, mais il ne sert à rien de lire des corrections de toute façon. Je vous rappelle la vidéo de Borg que je vous ai montrée en classe: ça a l'air facile de le voir gagner RG en jouant à la baballe et on a l'impression de pouvoir faire pareil sans se fatiguer. Et bin aller voir une correction c'est pareil. Donc ne lisez que si vous pensez que ça peut vous aider à trouver le sommeil. Mais pas pour d'autres raisons.

## 2 Intro

Ce document est destiné à vous éviter d'hésiter dans vos révisions. La garantie sera mesurée en deux temps: un DST de type QUIZZ et un DST banal. Le QUIZZ est très important car me permet de mesurer votre aptitude à pratiquer la science correctement. Aucune réponse ne sera à justifier et votre score sera le suivant:

$$\frac{10a}{2+b}$$

où  $a$  est le nombre de bonnes réponses et  $b$  le nombre de réponses FAUSSES données. Ne pas répondre n'est pas une faute (c'est presque une bonne réponse d'ailleurs, de la part d'un scientifique).

## 3 Qualitatif VS quantitatif

Je vous rappelle que les progrès que vous devez faire sont **QUALITATIFS**. Vous aurez donc droit à tous les documents que vous voulez AUX deux DST. Comme dit 1000 fois, mon objectif est de vous voir un jour commencer à respecter les règles du jeu, pour vous voir commencer à pouvoir vous entraîner. Tant que vous croyez avoir des lacunes ou tant que vous trouvez des solutions fausses à l'aide de "théorèmes faux" que vous utilisez dans vos copies, non seulement:

1/ Vous ne marquez pas de point, mais EN PLUS

2/ Vous ne vous entraînez pas, car une fois les exercices "résolus" de manière fausse, mais "psychologiquement résolus quand-même", aucun processus ne vous permet de "souffrir" de ne pas avoir trouvé (puisque en un certain sens "vous avez trouvé", c'est juste faux), donc de continuer d'approfondir et chercher.

## 4 Le Langage Mathématique

.. est votre principal problème. Les questions que je poserai ne soulèveront pas de difficulté mathématique profonde mais viseront à mesurer si vous avez fait un effort pour regarder en face vos difficultés à LIRE et ECRIRE ce que VOUS PENSEZ VOUS-MÊME en langage mathématique. Ce sera déjà important, avant d'aller fouiller dans les coins sur des exercices qui feraient peiner des gens forts.

Quelques exemples que je souhaite vous voir surmonter. Si je demande quelle est la pente de la droite qui est la courbe de la fonction  $f$  telle que pour tout nombre  $x : f(3x + 7) = 7x - 1$ , j'espère ne pas vous voir, malhonnêtement, faire semblant de lire que  $f : x \mapsto 7x - 1$ , etc, etc.

Autre exemple, j'espère lire le moins souvent possible **des horreurs** comme  $\ll f(10) = 10^2 = 100$ , car on sait que  $f(3) = 3^2$  d'après l'hypothèse, donc que  $f(x) = x^2 \gg$ .

De même, si  $x = 3$ , l'équation  $[ax = 7; \text{inconnue } a]$  n'est pas difficile à résoudre, et j'espère ne pas lire qu'on "cherche  $x$ ".

Je vous invite aussi, pour ceux qui ont peur de leurs propres calculs, à lire un doc récent que j'ai mis en seconde. C'est assez frustrant car j'ai supprimé quelques règles valables, mais le foisonnement de "règles valables" vues au collègue a hélas l'inconvénient de mener 98% des élèves vers l'invention de règles fausses.

## 5 Les thématiques traitées

Ce qu'on a abordé en cours UNIQUEMENT et sans aller fouiller dans les coins non plus (je le répète, vous avez en plus eu 15 jours de pseudo-vacances avec les bacs blancs, je ne cherche pas à vous voir bourriner sur du quantitatif, je veux de la qualité). C'est à dire, en gros:

- 1/ Le second degré
- 2/ Les suites très particulières que sont celles qui sont arithmétiques et géométriques
- 3/ La notion d'équation de courbe, de droites, les quelques formules utiles ou évidences
- 4/ Les vecteurs et le produit scalaire
- 5/ Les fonctions célèbres que sont la valeur absolue et la racine carrée
- 6/ La notion de dérivée: théorie et pratique (je suis obligé de vous imposer que vous avez le devoir de savoir dériver une fonction, ce ne serait pas correct de ma part de vous dispenser de ça)
- 7/ 2 ou 3 grammes de familiarité avec le langage CAML (mais vraiment presque rien).

## 6 Exercices pour se tester

Comme vous savez je n'aime pas trop faire ça (donner des exercices qui créent des attentes de les revoir en DST au point que certains d'entre vous ne procèdent qu'en imitant les corrections vues). J'en mets quelques uns ci-dessous, mais je ferai une mise à jour avec plus d'exercices. Je vous rappelle que vous avez un livre de maths, il est certes très mal écrit et bourré de chantilly inutile, mais... il contient tout plein d'exercices (que vous pouvez faire ou ne pas trouver, mais à tout le moins rien ne vous empêche d'y réfléchir). Je choisis exprès des exercices qui font tout travailler et qui peut prendre 20mn à un élève. Autrement dit, réfléchir seulement 14mn peut faire risquer de croire qu'on n'y arrive pas.

### 6.1 Second degré + seconde + fonctions célèbres

1/ Supposant que l'image de 3 par  $f : x \mapsto ax^2 - 6ax + b$  est 11 et  $as = 14$  et  $f(1000) = 70 + t^2$  peut-on en déduire que  $a + 20 > 2$ ?

Oui on peut,  $f$  atteint son extremum en  $(-(-6a))/(2a) = 3$ , et on connaît son image, qui est 11. Vu que  $f(1000) > 11$ , c'est un minimum, donc  $a \geq 0$ , donc  $a + 20 > 2$

2/ Sans rien savoir sur les nombres  $x, y$ , prouver que  $x^2 + xy + y^2 + 3 > 0$ .

$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$ . Il ne peut être négatif que si  $xy \geq 0$ , or si ça arrive,  $x^2 + xy + y^2$  est la somme de 3 termes positifs, donc en lui ajoutant 3 on obtient un nombre positif encore.

3/ Résoudre l'inéquation  $[x + \frac{30}{x} < 1000; inc x]$

Faire un tableau de signes avec  $\frac{x^2 - 1000x + 30}{x}$  et attention, je vous connais, ne surtout pas virer le  $x$  du dénominateur...

4/ Proposer  $a, b, c$  pour que  $[x \mapsto -7x^2 + 843x - 3] = [x \mapsto a - (bx + c)^2]$

Il suffit de réussir à trouver  $a, b, c$  pour que  $[x \mapsto -b^2x^2 - 2bcx + (a - c^2)] = [x \mapsto -7x^2 + 843x - 3]$ , aptitude attendue au CLG

5/ Trouver les points du plan où se coupent la courbe  $[x = y^2 + y + 1]$  et la courbe  $[x + y = 1000]$

En les points  $(x, y)$  tel que  $1000 - y = y^2 + y + 1$  et  $x = y^2 + y + 1$  qu'on trouve en résolvant  $[y^2 + y + 1 = 1000 - y]$ , chap second degré

6/ Résoudre l'inéquation  $[3x + |7x + 1| > |x|; inc x]$

Ce genre d'exercice est une punition, bien que très facile. Un tableau à double entrée peut vous soulager.

### 6.2 Géométrie, vecteurs, produit scalaire, cercle

1/ Donner une équation de la droite perpendiculaire à la droite  $[x + 3y = 7]$  qui passe par  $(1, 10000)$  Le vecteur  $(1, 3)$  est normal à  $[x + 3y + (-7) = 0]$  donc doit diriger notre droite désirée qui aura comme équation,  $[3x - y + b = 0]$ , avec un  $b$  à trouver (CLG) pour que  $3 \times 1 - 10000 + b = 0$

2/ Prouver que la courbe  $[]$  est le cercle de rayon 77 et de centre  $(14, 101)$  (classe de 4ième)

Le théorème de Pythagore et sa réciproque utilisés avec le triangle formé par les 3 points  $(x, y); (14, 101); (14, y)$  disent que le carré de la distance entre  $(x, y)$  et  $(14, 101)$  vaut  $77^2$  ssi  $(x - 14)^2 + (y - 101)^2 = 77^2$

3/ Après avoir fait l'exercice 2, prouver que  $[x^2 + y^2 + 7x + 100y = 50000]$  est un cercle et donnez-en centre et rayon

C'est juste le cercle d'équation  $[(x - (-3.5))^2 + (y - 50)^2 = b^2]$  avec un  $b$  que CLG vous permet de déterminer (n'oubliez pas que  $(x + 3.5)^2 = x^2 + 7x + 49$ , etc)

4/ En pensant à trois vecteurs inspirant prouver, pour tous nombres que si  $(ax + by)^2 + (au + bv)^2 + (xu + yv)^2 = 0$  alors  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = 0$

Les 3 vecteurs  $(a, b); (x, y); (u, v)$  sont déclarés orthogonaux par l'hypothèse, il y en a donc un au moins d'entre eux qui est nul, ce qui réalise la conclusion attendue

5/ Soient  $A, B$  des points différents. Prouver que l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 32$  est une droite perpendiculaire à  $(AB)$

C'est la droite d'équation  $[(x_B - x_A) \cdot (x - x_A) + (y_B - y_A) \cdot (y - y_A) = 32]$  que le CLG vous permet de réécrire  $[(x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y + \text{NombreA} \text{CalculerAvecCLG} = 0]$  qui comme vecteur normal, justement, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$

6/ Prouver que les parallélogrammes ayant des diagonales perpendiculaires sont forcément des losanges en utilisant la notion de produit scalaire.

7/  $A(33, 78)$  et  $B(1, 8)$ . Soient  $C$  le point de la demi-droite  $[OA)$  qui est sur le cercle trigo et  $D$  le point de la demi-droite  $[OB)$  qui est sur le cercle trigo. On suppose de plus que  $k\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ . Trouver  $k$

8/ Sachez calculer des produits scalaires avec une simple règle graduée

9/ Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  tel que  $BC = 22$ . Peut-on sans connaître autre chose trouver combien vaut  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ ?

Soit  $D$  le milieu de  $[BC]$ . On a égalité entre les deux nombres suivants:  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$  car  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$ , le nombre  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$  étant nul d'après CLG. Donc le produit scalaire demandé est déductible, c'est  $22 \times 11$

### 6.3 Dérivation

Je vous mets d'abord un exercice qui est très utile, mais abstrait (mais ne nécessite pas d'inspiration), car à lui seul, c'est 1 mois de Terminale S qui est réglé. Après suivent des petits exos. Le symbole  $\forall$  est une abréviation de <<quel que soit>>

1/ On suppose que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et que  $f' = f$  et que  $f(0) = 1$  et que  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$ . Pour chaque nombre  $a$ , on note  $h_a$  la fonction

$$x \mapsto \frac{f(a+x)}{f(x)}$$

1.1/ Justifier que  $\forall a, x : h_a(x)f(x) = f(a+x)$

1.2/ En déduire que pour chaque  $a$  la dérivée de  $h_a$  est constante nulle.

1.3/ On admet que toute fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  ayant la constante nulle comme dérivée est constante. Déduire de tout ça que

$$\forall a, x : h_a(0)f(x) = f(a+x)$$

1.4/ On note  $g : a \mapsto h_a(0)$ . Prouver que pour tout nombre  $x : g(x) = f(x)$

1.5/ En déduire que  $\forall x, y : f(x+y) = f(x) \times f(y)$

2/ Entraînez-vous à dériver avec votre livre en dérivant les fonctions qu'il vous demande de dériver (sans faire le reste des exos)

3/ Une fonction assez lourdingue à dériver est:

$$x \mapsto (7x^2 + 3)(10 - x)^9 / (11x)^{1000}$$

je vous invite à passer 15mn à la dériver, ça fait travailler beaucoup de règles du tableau des dérivées.

4/ Soit  $f$  la fonction telle que pour tout nombre  $x : f(3x - 7) = x^2$ . Trouver qui est  $f'(150)$

Pour TOUT nombre  $x$  :  $f(x) = f(3((x+7)/3) - 7) = ((x+7)/3)^3$ . Maintenant on connaît vraiment  $f$ , on la dérive et on calcule  $f'(150)$

5/ Faire le tableau de variation de  $f : x \mapsto 7x^2 + 3x - 2$  de deux façons différentes, dont une en utilisant les dérivées

Façon1: chapitre second degré (TV d'un trinôme). Façon2: la dérivée est  $x \mapsto 14x + 3$ , fonction affine dont vous faites le TS, qui vous donne le TV de  $f$ , via le gros théorèmes de dérivation qui lient signe de sa dérivée et variation de la fonction

6/ Proposer 3 nombres  $a, b, c$  tels qu'on est sûr que TOUS les antécédents de 1 par  $f : x \mapsto x^2 - x$  sont dans  $[a, a + 0.1] \cup [b, b + 0.1] \cup [c, c + 0.1]$ . Indication: le TV de  $x \mapsto f(x) - 1$  peut très avantageusement vous aider. La calculatrice aussi.

## 7 Cagnotte

Comme toujours, récompense à qui me signale les fautes de ce document (je ne l'ai pas relu exprès).

## 8 Gentil défi

Prouver sans aide et uniquement avec des admis de l'école primaire que pour tout nombre entier  $n > 0$ , le nombre  $n^3 + 5n$  est un multiple de 6. (Cette question est la dernière question de l'exercice de spécialité maths S que mes collègues viennent de poser à leur bac blanc 2019)