Correction de l'exercice n°41 page 287

Dans chacune des questions, z désignera un complexe ; on posera $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$.

• **a)** $z = 2\,\overline{z} \iff a + b\,\mathrm{i} = 2(a - b\,\mathrm{i}) \iff a + b\,\mathrm{i} = 2a - 2b\,\mathrm{i}$

$$\iff \begin{cases} a = 2a \\ \text{et} \\ b = -2b \end{cases} \qquad \text{(par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ \text{et} \\ b = 0 \end{cases} \iff z = 0$$

• **b)** $\overline{z} = \mathrm{i}\,z \iff a - b\,\mathrm{i} = i\,(a + b\,\mathrm{i}) \iff a - b\,\mathrm{i} = -b + a\,\mathrm{i}$

$$\iff \begin{cases} a = -b \\ \text{et} \\ -b = a \end{cases} \iff (b = -a)$$

Ainsi on a : $\overline{z} = \mathrm{i}\,z \iff \mathfrak{Im}(z) = -\mathfrak{Re}(z)$.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation est constitué par tous les nombres complexes dont la partie imaginaire est l'opposée de la partie réelle : ils s'écrivent sous la forme $a - a\,\mathrm{i}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Par exemple $3 - 3i$, $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\,\mathrm{i}$ *etc.* en font partie.

• **c)** $2z - 4 = 5\,\mathrm{i} + 4\,\overline{z} \iff 2(a + b\,\mathrm{i}) - 4 = 5\,\mathrm{i} + 4(a - b\,\mathrm{i}) \iff \underbrace{2a - 4}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2b}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i} = \underbrace{4a}_{\in\mathbb{R}} + (\underbrace{5 - 4b}_{\in\mathbb{R}})\,\mathrm{i}$

$$\iff \begin{cases} 2a - 4 = 4a \\ \text{et} \\ 2b = 5 - 4b \end{cases} \qquad \text{(par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)}$$

$$\iff \begin{cases} a = -2 \\ \text{et} \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \iff z = -2 + \frac{5}{6}\,\mathrm{i}$$

• **d)** $z\,\overline{z} = z + 2 \iff (a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i}) = a + b\,\mathrm{i} + 2 \iff a^2 - (b\,\mathrm{i})^2 = a + 2 + b\,\mathrm{i}$

$$\iff \underbrace{a^2 + b^2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i} = \underbrace{a + 2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{b}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 + b^2 = a + 2 \\ \text{et} \\ b = 0 \end{cases} \qquad \text{(par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ \text{et} \\ b = 0 \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré $a^2 - a - 2 = 0$ vaut $\Delta = 9 > 0$, donc celle-ci possède deux solutions réelles : $\frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $\frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$. Ainsi :

$$z\,\overline{z} = z + 2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (a = -1 \text{ ou } a = 2) \\ \text{et} \\ b = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \Big(\; z = \underbrace{-1 + 0\,\mathrm{i}}_{-1} \quad \text{ou} \quad z = \underbrace{2 + 0\,\mathrm{i}}_{2} \;\Big)$$

• **e)** $z^2 = z\,\overline{z} \;\Leftrightarrow\; z^2 - z\,\overline{z} = 0 \;\Leftrightarrow\; z(z - \overline{z}) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\; z = 0 \quad \text{ou} \quad z = \overline{z} \;)$
$\Leftrightarrow\; (\; z = 0 \quad \text{ou} \quad z \in \mathbb{R} \;) \;\Leftrightarrow\; (\; z \in \mathbb{R} \;)$
Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire est constitué par ***tous*** les nombres réels).

• **f)** $\overline{z} - 1 = z\,\overline{z} - \mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; a - b\,\mathrm{i} - 1 = (a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i}) - \mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; a - 1 - b\,\mathrm{i} = a^2 - (b\,\mathrm{i})^2 - \mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\; a - 1 - b\,\mathrm{i} = a^2 - (b\,\mathrm{i})^2 - \mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{(a - 1)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(-b)}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i} = \underbrace{(a^2 + b^2)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(-1)}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} a - 1 = a^2 + b^2 \\ \text{et} \\ -b = -1 \end{cases} \qquad \text{(par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)}$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} a^2 - a + 2 = 0 \\ \text{et} \\ b = 1 \end{cases}$$

L'équation du second degré $a^2 - a + 2 = 0$ a un discriminant égal à $\Delta = -3$. Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle (attention, les solutions complexes non réelles ne nous intéressent pas puisque a, comme toute partie réelle (ici, celle de z) qui se respecte, est un nombre réel).

Ainsi l'équation de départ ne possède aucune solution dans $\mathbb{C}$.

• • **Remarque** : Voici la syntaxe à utiliser dans *Xcas* pour résoudre (par exemple) l'équation de la question c) :