TS

Correction des exercices n°35 et 36 page 287

n°35

- $\dfrac{3-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=\dfrac{(3-\mathrm{i})^2}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}=\dfrac{9-6\,\mathrm{i}+\overbrace{\mathrm{i}^2}^{-1}}{9-\underbrace{\mathrm{i}^2}_{-1}}=\dfrac{8-6\,\mathrm{i}}{10}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\,\mathrm{i}$

- $\dfrac{1-5\,\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(1-5\,\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{2+\mathrm{i}-10\,\mathrm{i}\overbrace{-5\,\mathrm{i}^2}^{+5}}{2^2\underbrace{-\mathrm{i}^2}_{+1}}=\dfrac{7-9\,\mathrm{i}}{5}=\frac{7}{5}-\frac{9}{5}\,\mathrm{i}$

- $\dfrac{4}{\mathrm{i}-1}-\dfrac{4}{\mathrm{i}+1}=\dfrac{4(\mathrm{i}+1)-4(\mathrm{i}-1)}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}+1)}=\dfrac{4\,\mathrm{i}+4-4\,\mathrm{i}+4}{\mathrm{i}^2-1^2}=\dfrac{8}{-2}=-4$
- $\dfrac{-7}{(\mathrm{i}+1)(2-\mathrm{i})}=\dfrac{-7}{2\,\mathrm{i}-\mathrm{i}^2+2-\mathrm{i}}=\dfrac{-7}{3+\mathrm{i}}=\dfrac{-7(3-\mathrm{i})}{3^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{-21+7\,\mathrm{i}}{10}=-2,1+0,7\,\mathrm{i}$

n°36

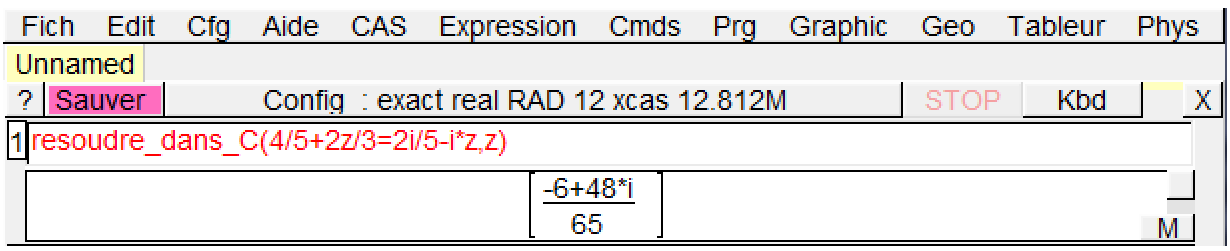
a) $2\,\mathrm{i}z=1-z$
$\Leftrightarrow\ z+2\,\mathrm{i}z=1$
$\Leftrightarrow\ (1+2\,\mathrm{i})z=1$
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{1}{1+2\,\mathrm{i}}$
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{1-2\,\mathrm{i}}{1^2-(2\,\mathrm{i})^2}$
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{1-2\,\mathrm{i}}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\,\mathrm{i}$

b) $4\,\mathrm{i}z+2\,\mathrm{i}=1-z+\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\ z+4\,\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}-2\,\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\ (1+4\,\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+4\,\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})(1-4\,\mathrm{i})}{1^2+4^2}$
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{1-4\,\mathrm{i}-\mathrm{i}+4\,\mathrm{i}^2}{17}=-\frac{3}{17}-\frac{5}{17}\,\mathrm{i}$

c) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{2z}{3}=\dfrac{2\,\mathrm{i}}{5}-\mathrm{i}z$
$\Leftrightarrow\ \left(\frac{2}{3}+\mathrm{i}\right)z=-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\,\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\,\mathrm{i}}{\frac{2}{3}+\mathrm{i}}$
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{-12+6\,\mathrm{i}}{10+15\,\mathrm{i}}$ (après avoir multiplié par 15 en haut et en bas)
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{(-12+6\,\mathrm{i})(10-15\,\mathrm{i})}{10^2+15^2}$
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{-120+180\,\mathrm{i}+60\,\mathrm{i}-90\,\mathrm{i}^2}{325}$
$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{-30+240\,\mathrm{i}}{325}=-\frac{6}{65}+\frac{48}{65}\,\mathrm{i}$

d) $\dfrac{z}{\mathrm{i}-1}-\mathrm{i}=\dfrac{z}{\mathrm{i}+1}+\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\ \left(\dfrac{1}{\mathrm{i}-1}-\dfrac{1}{\mathrm{i}+1}\right)z=2\,\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\ \dfrac{\mathrm{i}+1-(\mathrm{i}-1)}{\mathrm{i}^2-1^2}\,z=2\,\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\ \dfrac{2}{-2}\,z=2\,\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow\ z=-2\,\mathrm{i}$

Remarque : en utilisant le logiciel ***Xcas***, on peut utiliser la fonction ***resoudre_dans_C*** pour déterminer les solutions d'une équation d'inconnue complexe. Voici, une capture d'écran correspondant à la résolution du c) :



Note : Pour résoudre une équation d'inconnue réelle, la fonction à utiliser est simplement ***resoudre***. Comparez les deux en saisissant :
$resoudre(x\hat{~}2=-1,x)$ puis $resoudre\_dans\_C(x\hat{~}2=-1,x)$.