Correction de l'exercice n°$42^{a)c)}$ p 119 et d'une limite*

$\boxed{\star}$ Notons $u_n = \dfrac{2n^3 - n}{n^2 + n + 1}$. On a $u_n = \dfrac{n^2\left(2n - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{2n - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

d'où par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n^2}\right) = 1 + 0 + 0 \underbrace{=}_{(\natural)} 1$

- par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

d'où par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(2n - \tfrac{1}{n}\right) \underbrace{=}_{(\square)} +\infty$

On déduit de $(\natural)$ et $(\square)$ par quotient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$\boxed{\textbf{42}}$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{1}{n}(n^2 + 10) = \dfrac{n^2}{n} + \dfrac{10}{n} = n + \dfrac{10}{n}$.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$
- par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \tfrac{10}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(10 \times \tfrac{1}{n}\right) = 10 \times 0 = 0$

d'où par somme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 + 5} = \dfrac{n^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(4n + \frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{4n + \frac{5}{n^2}}$

- par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{n} = -2 \times 0 = 0$
- par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 3 \times 0 = 0$

d'où par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \tfrac{2}{n} + \tfrac{3}{n^2}\right) \underbrace{=}_{(\natural)} 1$

- par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4n = +\infty$
- par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 5 \times 0 = 0$

d'où par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(4n + \tfrac{5}{n^2}\right) \underbrace{=}_{(\star)} +\infty$

On déduit de $(\natural)$ et $(\star)$ par quotient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Remarque : on pouvait également mettre en facteur n^3 en haut et en bas ou même mettre en facteur n^2 en haut et n^3 en bas.