Correction de l'exercice n°60 p 121

1)a) On a $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$: u_n est la somme de n termes.

Pour mieux comprendre comment est construite la suite (u_n), voici les trois premiers termes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1^2+k} = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}\ ,$$
$$u_n = \sum_{k=1}^{2} \frac{2}{2^2+k} = \frac{2}{2^2+1} + \frac{2}{2^2+2} = \frac{2}{5} + \frac{2}{6} = \frac{11}{15}\ ,$$
$$u_n = \sum_{k=1}^{3} \frac{3}{3^2+k} = \frac{3}{3^2+1} + \frac{3}{3^2+2} + \frac{3}{3^2+3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} = \frac{181}{220}\ .$$

1)b) Soit k un entier fixé ; si n est un entier supérieur ou égal à k, alors $\frac{n}{n^2+k} = \frac{1}{n+k\times\frac{1}{n}}$. Par produit on a $\lim_{n\to+\infty}\left(k\times\frac{1}{n}\right) = k\times 0 = 0$; d'autre part $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par somme $\lim_{n\to+\infty}\left(n+k\times\frac{1}{n}\right) = +\infty$. Finalement par quotient, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+k} = 0$.

$\hookrightarrow$ Chaque terme de la somme définissant u_n a donc une limite nulle.

Attention, on ne peut pas en conclure que u_n converge vers $0+\cdots+0 = 0$, car le nombre de terme de la somme $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$ dépend de n (il est égal à n, comme on l'a vu au 1.a.).

2)a) Les fractions $\frac{n}{n^2+1}, \frac{n}{n^2+1}, \cdots, \frac{n}{n^2+n}$ ont toutes le même numérateur et des dénominateurs qui s'échelonnent entre n^2+1 et n^2+n. Ainsi la plus petite des fractions précédentes est $\frac{n}{n^2+n}$ et la plus grande est $\frac{n}{n^2+1}$.

2)b) D'après la question précédente, u_n est une somme de n termes tous inférieurs à $\frac{n}{n^2+1}$ et tous supérieurs à $\frac{n}{n^2+n}$. On en déduit que $n\times\frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n\times\frac{n}{n^2+1}$, d'où $\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$.

2)c) Si $n>0$, on a $\frac{n^2}{n^2+n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ et $\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ donc par somme et quotient, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n} = \frac{1}{1+0} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+0} = 1$. La suite (u_n) est donc encadrée par deux suites qui convergent vers 1 : le théorème des gendarmes prouve donc que (u_n) converge aussi vers 1.