Séance d'ouverture du laboratoire mathématiques Eaubonne

Emmanuel Volte

11 mars 2019

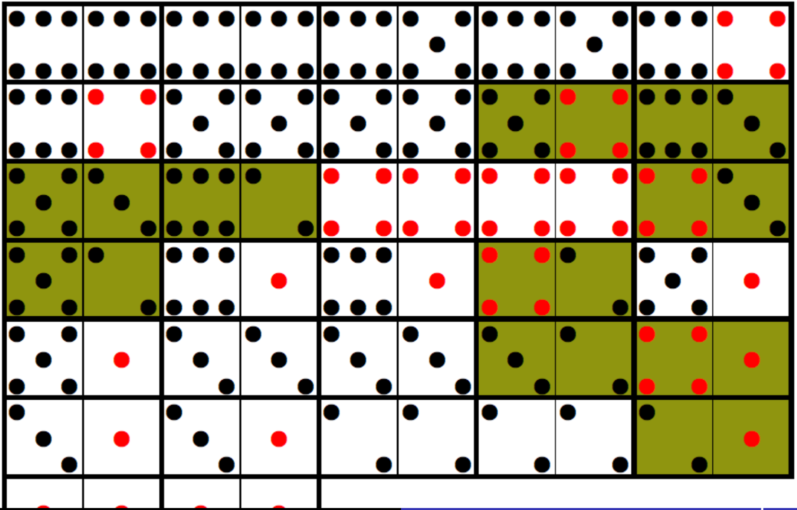
> *« Le jeu de dominos a des profondeurs mathématiques dignes des méditations les plus doctes, peu de têtes ont été assez vastes et assez puissantes pour les sonder toutes, les plus habiles s'y trompent encore. »*

Eugène Briffault, 1843

Naissance des dominos

- Egypte (700 ap. JC) ?
- Chine (XII^e)
- Europe (XVIII^e)

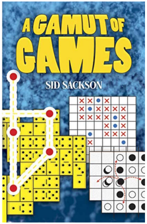
Dominos chinois

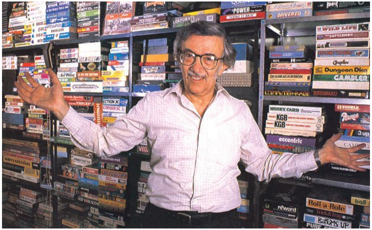


Règles et variantes

- Règle débutant/enfant
- Règle classique
- Matador, ...
- Dix attrapés = rami (cercles chinois aux USA)
- Le quarante deux = jeu de levées
- Bead dominos
- ...

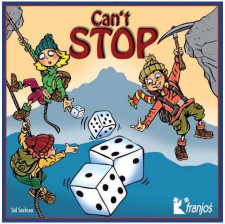
Sid Sackson

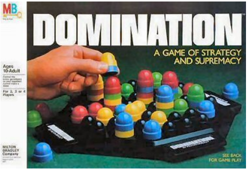

A GAMUT OF GAMES
SID SACKSON



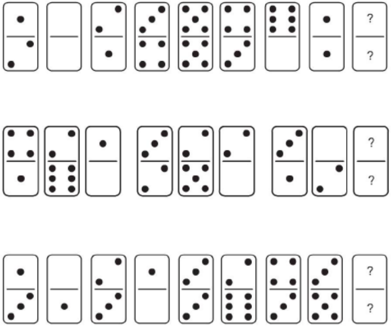

SLEUTH
SOLVE THE MYSTERY
OF THE MISSING GEMS

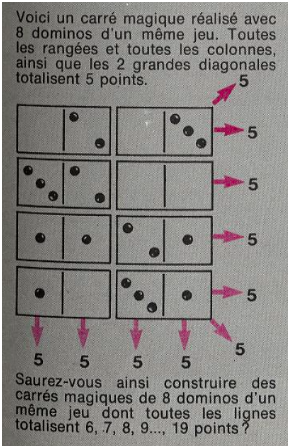

ACQUIRE


Can't
STOP
Sid Sackson
franjos

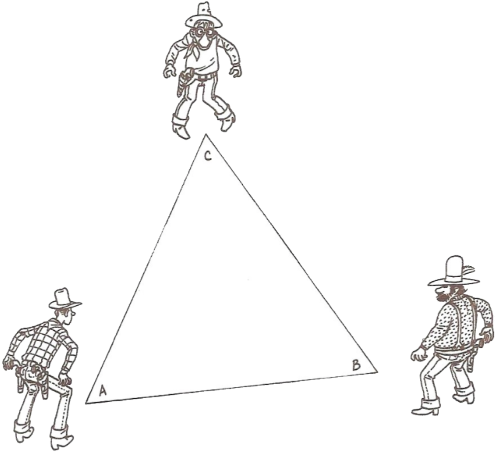

MB
DOMINATION
A GAME OF STRATEGY
AND SUPREMACY

Tests IFSI - Jeux de logique





Y a-t-il des stratégies possibles dans un jeu avec hasard ?



Définition des jeux combinatoires

- Deux joueurs jouent alternativement
- Position de départ donnée
- A partir d'une position on sait quelles autres positions on peut atteindre (options)
- Jeu à information complète
- Pas de hasard
- Il n'y a pas de partie infinie
- Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu

Les jeux impartiaux / jeux de Nim

Définition

Un jeu **impartial** est un jeu combinatoire
dont les options ne dépendent pas du joueur.

Exemples de jeux de Nim

- Fan-Tan
- Tiouk-Tiouk
- Jeu de Marienbad
- Jeu de Grundy (à son tour on doit diviser un entier d'une liste en 2 entiers non nuls distincts)

Résolution des jeux de Nim

Théorèmes

- Charles Bouton (1901) :
  résolution des jeux de Nim
- Sprague (1935) / Grundy (1939) :
  Tout jeu impartial est équivalent à un jeu de Nim classique.
  Généralisation des jeux de Nim par décomposition d'un jeu en plusieurs jeux indépendants

Xor sur $\mathbb{N}$

Définition

Xor de deux entiers naturels : on somme bit par bit
les représentations binaires de deux entiers avec la règle $1 \oplus 1 = 0$

Propriétés

Xor est une opérations commutative et associative.
Pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a \oplus a = 0$

Lemme

Soit $\delta \neq 0$ tel que $\delta \oplus a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$. Alors
$\exists i \in [1; n], \quad \delta \oplus a_i < a_i$

Le mex (minimum exclu) et nimber

Définition

Le mex d'une suite finie d'entiers naturels est le plus petit entier naturel qui n'est pas dans la suite.

Définition

Etant donné un jeu partisan, on peut attribuer à chaque position un nimber de la façon suivante :
Le nimber de toutes les positions terminales est nul.
Le nimber d'une position est le mex des nimbers de toutes les options possibles.

Stratégies gagnantes

Stratégie

Les positions ayant un nimber nul sont les positions gagnantes, après avoir joué notre coup.
L'ensemble des positions gagnantes est appelé le noyau.
Toute position avec un nimber non nul a une option qui fait partie du noyau.

Théorème Sprague - Grundy

Lorsqu'un jeu se décompose en 2 jeux avec la possibilité de jouer à l'un ou l'autre des jeux à chaque tour, le nimber des positions du jeu est le xor des nimber des positions des 2 jeux.

Preuve (début)

On considère un jeu J qui se décompose en deux jeux $A \times B$.
On doit prouver que pour toute position $p = (a, b)$, on a :
$n(p) = n(a) \oplus n(b)$ où n est la fonction nimber.
On va faire une récurrence forte sur la longueur maximum d'une partie à partir de la position.
Initialisation : pour une position terminale l'égalité est vérifiée car p terminale équivaut à a et b terminales.
Hérédité. Supposons la propriété vérifiée pour toutes les options p' d'une position $p = (a, b)$.
Il est d'abord évident que pour tout a' et b' (options de a et b) :

$$n(a') \oplus n(b) \neq n(a) \oplus n(b) \quad \text{et} \quad n(a) \oplus n(b') \neq n(a) \oplus n(b)$$

De sorte que $n(a) \oplus n(b)$ n'est pas un nimber d'une option de p (il est exclu de l'ensemble des nimber des options)

Preuve (suite)

Il faut alors montrer que tous les entiers inférieurs à $n(a) \oplus n(b)$ sont des nimbers d'une option de p.
Si $n(a) \oplus n(b) = 0$ c'est évident (il n'y pas d'entier inférieur).
Supposons $n(a) \oplus n(b) > 0$ et prenons $k < n(a) \oplus n(b)$.
Posons $\delta = k \oplus n(a) \oplus n(b)$, on a alors :

$$\delta \oplus k \oplus n(a) \oplus n(b) = 0$$

D'après le lemme, on a donc $\delta \oplus k < k$ ou $\delta \oplus n(a) < n(a)$ ou $\delta \oplus n(b) < n(a)$.
C'est à dire $n(a) \oplus n(b) < k$ (non !) ou $k \oplus n(b) < n(a)$ ou $k \oplus n(a) < n(b)$.

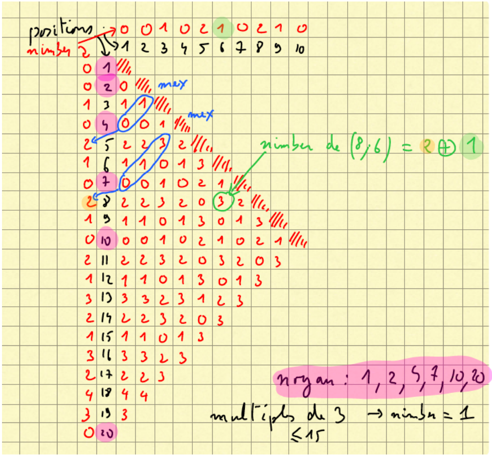
Preuve (fin)

On a donc par exemple $k \oplus n(b) < n(a)$.
D'après la définition du nimber, il existe donc a' tel que $n(a') = k \oplus n(b)$, on trouve alors

$$n((a', b)) = n(a') \oplus n(b) = k \oplus n(b) \oplus n(b) = k$$

Idem pour l'autre inégalité $k \oplus n(a) < n(b)$.
Ainsi il existe p' tel que $n(p') = k$.
Et donc $n(p) = n(a) \oplus n(b)$. CQFD

Exemple de calcul de nimber : jeu de Grundy



Applications à l'enseignement ?

Quelques pistes :

- Faire réfléchir aux stratégies, et passer à la programmation.
- Construire un simulateur de jeu de dominos où on peut mettre des formules à la place des nombres.
- ...

Bibliographie

- Histoire des Jeux de Société, JM Lhôte, Flammarion
- Pour la science n^{o}377, p. 88-93, JP Delahaye
- Jeux et Stratégies, numéros 2 (stratégie) et 3 (dominos).
- A gamut of games, Sid Sackson