Etude de fonctions, intégration et suites

Exercice 1 : Nouvelle-Calédonie novembre 2003

Les deux parties sont indépendantes.

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et pour } n \text{ entier naturel non nul} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}.$$

On note Γ_n, la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.
On désigne par I_n l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$$

Partie A

1. *a.* Etudier les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la conséquence graphique de ces résultats ?
   b. Etudier les variations de f_1.
   c. Tracer la courbe Γ_1.
   d. Calculer I_1.
2. *a.* Etudier les limites de f_3 en $+\infty$.
   b. Etudier les variations de f_3.
   c. Tracer la courbe Γ_3 sur le même dessin qu'au **1. c.**.
3. Calculer $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3$. En déduire la valeur de I_3.
4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes Γ_1, Γ_3 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

1. *a.* Etudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Etudier les variations de f_0.
2. Soit (a_n) la suite définie, pour n entier naturel non nul, par $a_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t^2}dt$.
   a. Interpréter graphiquement a_n.
   b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   c. Montrer que pour tout réel t, $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et en déduire que $a_1 \leqslant 1$.
   d. Montrer que pour tout réel t non nul : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout entier naturel non nul, $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{1+t^2}dt \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.
   e. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leqslant 2$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (a_n) ?

Exercice 2 : Amérique du sud novembre 2003

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

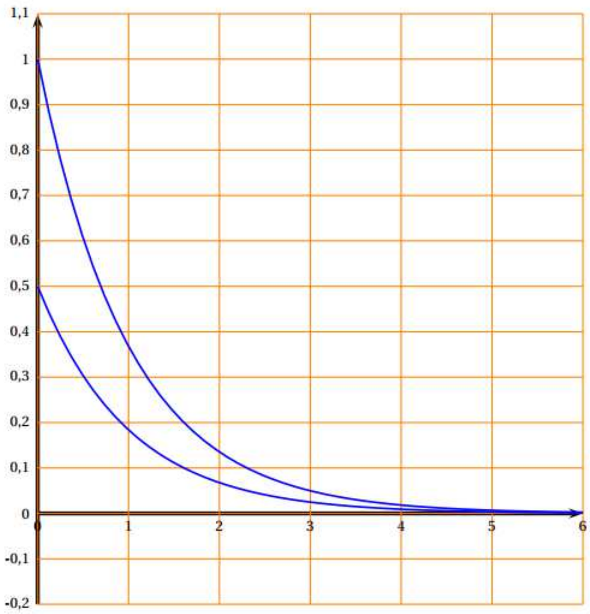
$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^x$.
3. *a.* Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Etudier les variations de f sur $[0\ ;\ \ +\infty[$.
4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2\mathrm{e}^x}$. On donne ci-dessous les courbes représentatives de g et h, notées respectivement Γ_1 et Γ_2.



   a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

   b. Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, Γ_1, et Γ_2 ? Tracer Γ sur le graphique précédent, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx$.

1. Donner une interprétation géométrique de (I_n).
2. (a) Démontrer, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$.

   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

   (c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $J_n = \displaystyle\int_0^n f(x)dx$.

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question **A. 4. a.**, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right) \leqslant J_n \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-n} \leqslant 1.$$

2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
   En déduire qu'elle converge.
3. On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :
   « Si u_n, v_n et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives a, b et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors
   $a \leqslant b \leqslant c$ ».
   Donner un encadrement de L.

Exercice 3 : Polynésie septembre 2003

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lll} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad \text{si} \quad x>0 \end{array}\right.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. *a.* Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. *a.* Etudier la dérivabilité de f en 0.
   b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
3. Etudier le sens de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x=1$.
2. On considère la fonction $g\ :\ x \mapsto f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Etudier le sens de variations de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$
   b. Etudier le sens de variations de g. En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente $\mathcal{D}$.
3. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente $\mathcal{D}$ (unité graphique : 2 cm).

Partie C

1. En reconnaissant la forme $u'v+uv'$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto x^2\ln x + \dfrac{1}{3}x^2$.
2. Soit n un entier naturel non nul. En déduire $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x dx$ en fonction de n.
3. En déduire en fonction de l'entier n, l'aire $\mathcal{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la tangente $\mathcal{D}$ et les deux droites d'équation $x=\dfrac{1}{n}$ et $x=1$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 4 : Antilles-Guyane septembre 2003

Partie A - étude préliminaire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=(2-x)\mathrm{e}^x-1$

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
   En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha<\beta$.
   Etudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.
4. A l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β.
5. Montrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{2-\alpha}$.

Partie B - étude d'une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$ et calcul intégral

1. Montrer que $\mathrm{e}^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la **partie A**, construire le tableau des variations de f.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie A s'annule.
5. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} dx.$$

Partie C - étude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle $I = [-2\ ;\ 0]$ est incluse dans cet intervalle.
2. *a.* Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{cases}$$
Montrer que u_1 appartient à l'intervalle $I = [-2\ ;\ 0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.
b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} v_0 & = & 0 \\ v_{n+1} & = & g(v_n) \end{cases}$$
Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.
Etablir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :
$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0.$$
Préciser le sens de variation de la suite (v_n).
3. *a.* Soit m la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :
$$m(x) = x - \ln(1+x).$$
Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.
b. Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$.
En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}$.
Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, donner un encadrement de $\dfrac{1}{2 - v_n}$ et établir que :
$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$
Prouver alors que, pour tout entier naturel n,
$$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).$$
Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$
c. On dit que deux suites sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si la différence des deux tend vers 0. On admet que, si deux suites sont adjacentes, alors ces deux suites convergentes et ont la même limite.
Que peut-on en déduire pour les suites (u_n) et (v_n) ?

Nombres complexes

Exercice 1 : Amérique du sud novembre 2003

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique 4 cm).
Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω.

Partie I

On pose $a_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathcal{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\text{i}$, et B' lepoint d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.
   a. Calculer b'.
   b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie II

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.
A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.
   a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.
   b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) + 2k\pi \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z})$.
   c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathcal{C}$ privé de O et de I.
2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O. On note x son affixe.
   On choisit a de manière que A soit un point de $\mathcal{C}$ différent de I et de O.
   Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).
   En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

Exercice 2 : Liban mai 2003

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$4z^2 - 12z + 153 = 0.$$
2. Dans le plan rapporté à un repè ?re orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A = \dfrac{3}{2} + 6\text{i}$,
   $z_B = \dfrac{3}{2} - 6\text{i}$; $z_C = -3 - \dfrac{1}{4}\text{i}$, $z_P = 3 + 2\text{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -1 + \dfrac{5}{2}\text{i}$.
   a. Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$.
   b. Déterminer l'affixe z_R du point R défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{CR} = \dfrac{-1}{3}\overrightarrow{CP}$.
   c. Déterminer l'affixe z_S du point S définie par :
$$z_S - z_A = e^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A)$$
   d. Placer les points P, Q, R et S.
3. *a.* Démontrer que le quadrilatè ?re $PQRS$ est un parallélogramme.
   b. Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$. En déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.
   c. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathcal{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.
4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?

Exercice 3 : Polynésie juin 2003

Dans tout l'exercice, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

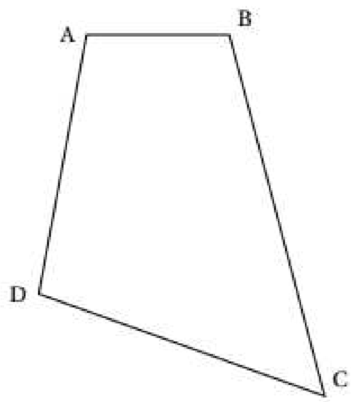
1. *a*. Le point E a pour affixe $Z_E = 3 + \mathrm{i}$ et le point F a pour affixe $Z_F = 1 + 3\mathrm{i}$.
   Placer dans $\mathcal{P}$ les points E et F.

   b. Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet H, c'est-à-dire tel que $\left(\overrightarrow{HF}\ ;\ \overrightarrow{HE}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   c. On désigne par Z_H l'affixe de H.
   Montrer que $\left|\dfrac{3+\mathrm{i}-Z_H}{1+3\mathrm{i}-Z_H}\right| = 1$ et que $\arg\left(\dfrac{3+\mathrm{i}-Z_H}{1+3\mathrm{i}-Z_H}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

   d. En déduire que $Z_H = 3 + 3\mathrm{i}$.

2. A, B, C et D sont quatre points du plan $\mathcal{P}$.



   (a) Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB d'angles droits respectifs $\widehat{\mathrm{BIA}}$, $\widehat{\mathrm{AJD}}$, $\widehat{\mathrm{DKC}}$ et $\widehat{\mathrm{CLB}}$.

   (b) Conjecturer la position relative des droites (IK) et (LJ) et le rapport des longueurs des segments $[IK]$ et $[LJ]$.

3. (a) On désigne par a, b et z_1 les affixes respectives des points A, B et I.
   Montrer que $\left|\dfrac{b-z_1}{a-z_1}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b-z_1}{a-z_1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
   En déduire que $z_1 = \dfrac{\mathrm{i}a-b}{\mathrm{i}-1}$.

   (b) Avec les points B, C et L d'affixes respectives b, c et z_L, exprimer sans démonstration z_L en fonction de b et c.

   (c) Avec les points C, D et K d'affixes respectives c, d et z_K, exprimer de mê ?me z_K en fonction de c et d.
   Avec les points D, A et J d'affixes respectives d, a et z_J exprimer de mê ?me z_J en fonction de a et d.

   (d) Montrer que $z_L - z_J = \mathrm{i}\,(z_K - z_I)$. En déduire que les droites (JL) et (KI) sont perpendiculaires et que $JL = KI$.

Probabilités

Exercice 1 : Métropole septembre 2003

Un commerce possède un rayon ≪ journaux ≫ et un rayon ≪ souvenirs ≫.
A la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon.
On constate que la caisse du rayon ≪ journaux ≫ contient trois fois plus de pièces de 1 euro que celle du rayon ≪ souvenirs ≫.
Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique.
Ainsi, 40 % des pièces de 1 euro dans la caisse du rayon ≪ souvenirs ≫ et 8 % de celles du rayon ≪ journaux ≫ portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira ≪ face étrangère ≫).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère.
   Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse ≪ souvenirs ≫. On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face étrangère.
   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
   b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
   c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
2. Les pièces de 1 euro issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac. On prélève au hasard une pièce du sac. On note S l'évènement : ≪ la pièce provient de la caisse ≪ souvenirs ≫ ≫ et E l'évènement ≪ la pièce porte une face étrangère ≫.

   a. Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $\mathrm{P}(S \cap E)$.
   b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à $0,16$.
   c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse ≪ souvenirs ≫.
3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à $0,16$.
   Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
   Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à $0,9$.

Exercice 2 : Liban mai 2003

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répè ?te n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-iè ?me tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.
2. On considère les évènements suivants :
   B_n : ≪ On tire une boule blanche lors du n-ème tirage ≫,
   U_n : ≪ On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ≫.
   a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.
   b. Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :
   $$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
   b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 3 : Amérique du Nord mai 2004

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	*B*	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.
Les trente cases, blanches (B), *jaunes* (J), *vertes* (V) *ou rouges* (R), *ont toutes la même probabilité d'être atteintes.*

– Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.
– Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.
– Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
– Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $\mathrm{E}(X)$ soit nulle.
2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.
   a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?
   b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ?
   c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en **2. b.** ?

Suites

Exercice 1 : Pondichéry avril 2003

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n\,(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$
   a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f\ : x \mapsto x(2 - x)$.
   c. Utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$.
2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.
   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c. Que peut-on en déduire ?
3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

   a. Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

Exercice 2 : Pondichéry avril 2004

1. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n
   a. Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
   b. Comparer les quatre premiers termes de la suite (u_n) aux quatre premiers termes de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.
2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.
   b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

   Exprimer S_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Plus difficile

Exercice 1 : Nouvelle-Calédonie novembre 2003

Pour tout entier naturel n non nul, on note $n!$ l'entier défini par :

$$n! = \Pi_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n$$

On admet que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} \times \frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k+1}$$

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $\mathrm{E}(S_n)$ est égale à 10.
Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité :

$$P\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{10}{n}\right)^{k} \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$$

   où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. (a) Etablir l'égalité

$$\ln\left[\mathrm{P}(S_n = 0)\right] = -10 \times \frac{\ln\left(1 - \dfrac{10}{n}\right)}{\dfrac{-10}{n}}$$

   où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(S_n = 0\right) = \mathrm{e}^{-10}$.

   (b) Démontrer que $\mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{P}\left(S_n = k\right) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   (c) Démontrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(S_n = k\right) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(S_n = k+1\right) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.

   (d) Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(S_n = k\right) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $P\left(S_n = k\right)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.