Probabilités conditionnelles, indépendance, loi binomiale

Table des matières

I Probabilités conditionnelles, événements indépendants 1
- I.1 Conditionnement par un événement 1
- I.2 Utilisation d'un arbre 2
- I.3 Événements indépendants 3

II Loi binomiale 4
- II.1 Schéma de Bernoulli 4

III Variable aléatoire 5
- III.1 Définition 5
- III.2 Exemple 5
- III.3 Espérance, variance et écart-type 5

IV Loi binomiale 6
- IV.1 Retour sur l'exemple précédent 6
- IV.2 Cas général 6
- IV.3 Espérance 6

V Exemple : exercice de bac blanc 7

VI Exemple : Bac Métropole juin 2012 7
- VI.1 Énoncé 7
- VI.2 Correction 8

I Probabilités conditionnelles, événements indépendants

I.1 Conditionnement par un événement

Définition

Soit p une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement tel que $p(A) \neq 0$. Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Conséquences :

- $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$
- $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ donc $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.
- On en déduit : $\boxed{p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)}$

Exemple : On lance successivement deux fois un dé tétraédrique équilibré (non truqué)numéroté de 1 à 4. On note les résultats dans l'ordre. Par exemple : $(4;1)$.
L'univers Ω est l'ensemble de tous les couples possibles. $\Omega = \{(i;j), i \in \{1;2;3;4\}, j \in \{1;2;3;4\}\}$.
Comme le dé est équilibré, on a une loi équirépartie : tous les résultats sont équiprobables. Chaque couple a

une probabilité de $\frac{1}{16}$ d'apparaître.
Soient les événements suivants :
A : « Le premier tirage a donné 3 ».
B : « La somme des deux résultats est supérieure ou égale à 7. »
On a : $p(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; $p(A \cap B) = \frac{1}{16}$.
Alors : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ (probabilité d'avoir une somme supérieure ou égale à 7 sachant que le premier nombre est 3.)

Remarques :

- $p_A(A) = \frac{p(A \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$ (l'événement A sachant A est certain).
- Si A et B sont incompatibles, $p_A(B) = 0$; en effet : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0}{p(A)} = 0$.
- $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.
- $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(B)$.

Exemple : Au jeu, l'objectif d'un tricheur est d'obtenir un conditionnement ; par exemple, au poker, sachant qu'il a vu l'as de trèfle dans la main de son voisin de gauche, la probabilité que le voisin de droite ait un carré d'as est nulle.

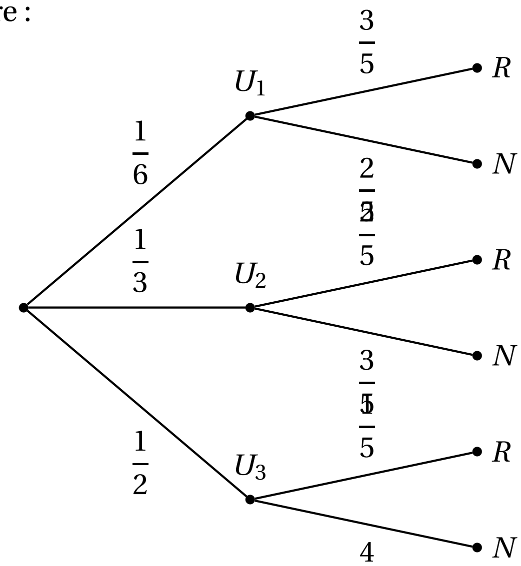
I.2 Utilisation d'un arbre

Exemple : on dispose de trois urnes, contenant chacune cinq boules, rouges ou noires.
Dans la première, il y a 3 boules rouges et 2 noires.
Dans la deuxième, il y a 2 boules rouges et 3 noires.
Dans la troisième, il y a 1 boules rouges et 4 noires.
Julien lance un dé :

- s'il obtient « 1 », il extrait au hasard une boule de l'urne 1.
- s'il obtient « 3 ou 5 », il extrait au hasard une boule de l'urne 2.
- s'il obtient « 2, 4 ou 6 », il extrait au hasard une boule de l'urne 3.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge et provienne de l'urne 1 ?
2. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

Solution.
Résumons la situation par un arbre :



1. La probabilité cherchée est $p\left(R\cap U_1\right) = p_{U_1}(R)\times p\left(U_1\right) = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{10}$
2. R est la réunion des événements incompatibles $R\cap U_1$, $R\cap U_2$ et $R\cap U_3$.
   On a alors : $p(R) = p\left(R\cap U_1\right) + p\left(R\cap U_2\right) + p\left(R\cap U_3\right)$, d'où :
   $p(R) = p_{U_1}(R)\times p\left(U_1\right) + p\left(p_{U_2}(R)\times p\left(U_2\right)\right) + p\left(p_{U_3}(R)\times p\left(U_3\right)\right)$ appelée formule des probabilités totales.
   On trouve $p(R) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{15} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

   Conclusion : $\boxed{p(R) = \dfrac{1}{3}}$

I.3 Événements indépendants

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$.

Exercice (**à savoir faire**) :
Montrer que si A et B sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi, de même que A et $\overline{B}$ ou $\overline{A}$ et B.

Montrons l'indépendance de $\overline{A}$ et $\overline{B}$:
Par hypothèse, A et B sont indépendants, donc $p(A\cap B) = p(A)p(B)$.
Alors : $p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = p\left(\overline{A\cup B}\right) = 1 - p(A\cup B) = 1 - \left[p(A) + p(B) - p(A\cap B)\right] = 1 - p(A) - p(B) + p(A)p(B)$
$= (1 - p(A))\times(1 - p(B)) = p(\overline{A})\times p(\overline{B})$ donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$.
A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$.

Démonstration :
On a : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ et $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ d'où : $p(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$ soit $p(B) = p_A(B)$ en divisant par p(A).

Remarque : Si A et B sont de probabilité non nulle, leur indépendance signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.

II Loi binomiale

II.1 Schéma de Bernoulli

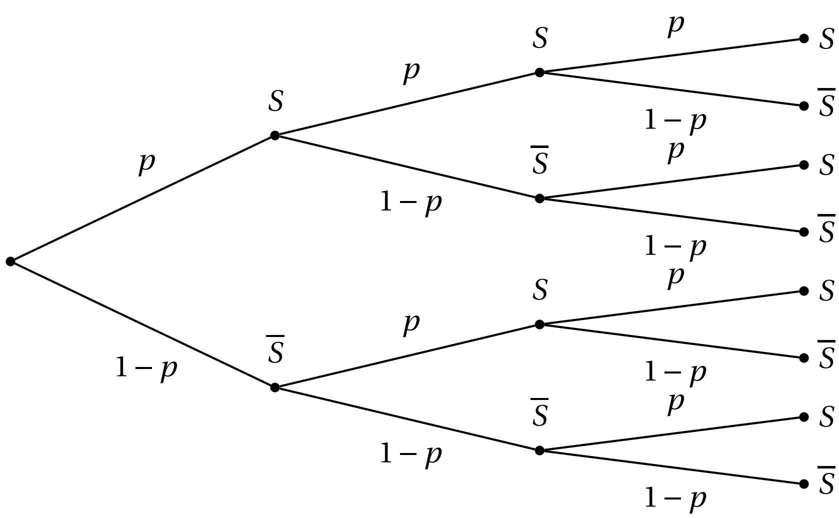
Définition

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues, appelées en général succès et échec.
Si p est la probabilité d'un succès, la probabilité d'un échec est $q = 1 - p$.

On appelle schéma de Bernoulli une répétition de n fois la même épreuve de Bernoulli, les épreuves successives étant indépendantes.
Les paramètres sont n (nombre d'épreuves) et p, probabilité d'un succès

On peut représenter la situation par un arbre pondéré.

Exemple avec trois épreuves :



On a : $p\left(S \cap \overline{S} \cap S\right) = p(1-p)p = p^2(1-p)$

III Variable aléatoire

III.1 Définition

Définition

Une variable aléatoire X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

III.2 Exemple

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. ».
L'ensemble de toutes les issues possibles est $\Omega = 1;2;3;4;5;6$, qu'on appelle l'univers des possibles ou tout simplement univers.
On considère alors le jeu suivant :

- - Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = 1;2;3;4;5;6$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4.
On a donc : $X(1) = 3$, $X(2) = 2$, $X(3) = -4$, $X(4) = 2$, $X(5) = -4$, $X(6) = 2$.
On résume les probabilités correspondant aux différentes valeurs orises par la variable aléatoire dans un tableau, qui donne la **loi de probabilité** de X :

x_i	-4	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

III.3 Espérance, variance et écart-type

Définition

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = p(X = x_i)$.

- L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est :

$$E(X) = p_1 x_1 1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$$

- La variance de la loi de probabilité de X est :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p (x_i - E(X))^2$$

- L'écart-type de la loi de probabilité de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : En utilisant l'identité remarquable $(x_i - E(X))^2 = x_i^2 - 2x_iE(X) + (E(X))^2$ poiur chaque valeur de i, on obtient :
$V(X) = \sum_i = 1^{i=n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$ qu'on résule par : $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$ (espérance du carré moins carré de l'espérance)

IV Loi binomiale

IV.1 Retour sur l'exemple précédent

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours des trois épreuves. On a :

- $p(X=3) = p(SSS) = p^3$
- $p(X=2) = p\left(\left(SS\overline{S}\right) \cup \left(S\overline{S}S\right) \cup \left(\overline{S}SS\right)\right) = 3p^2q$
- $p(X=1) = p\left(\left(S\overline{S}\overline{S}\right) \cup \left(\overline{S}S\overline{S}\right) \cup \left(\overline{S}\overline{S}S\right)\right) = 3pq^2$
- $p(X=0) = q^3$

IV.2 Cas général

Soit n un entier naturel. Imaginons la répétition de n épreuves identiques de Bernoulli.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours des n épreuves.
Soit k un entier $(0 \leqslant k \leqslant n)$.
Chaque chemin qui compte k succès et donc $n-k$ échecs a une probabiité égale à $p^k(1-p)^{n-k}$.
$\binom{n}{k}$ compte le nombre de positions possibles des k succès parmi les n positions possibles de S et $\overline{S}$, donc le nombre de chemins contenant k succès .

Propriété

On dit que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$. (on peut écrire $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;\,p)$).

Pour tout k avec $0 \leqslant k \leqslant n$, $p(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

IV.3 Espérance

Propriétés (admises)

- $E(X) = np$ (espérance)
- $V(X) = npq$ (variance) où $q = 1-p$
- $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ (écart-type).

V Exemple : exercice de bac blanc

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs.
On a trouvé (première partie) que la probabilité d'avoir un conifère est $p = 0,525$.

On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
   On arrondira à 10^{-3}.
3. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
   On arrondira à 10^{-3}.
4. Quelle est l'espérance de cette loi ?
   Interpréter le résultat.

Correction On a répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$.

On a alors $p(X = k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$= \boxed{\binom{10}{k} \times 0,525^k \times 0,475^{10-k}}$.

1. La probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères est :
   $p(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times 0,475^5$
   $\approx \boxed{0,243 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.
2. La probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus est :
   $p(X \leqslant 8) = 1 - [p(X = 9) + p(X = 10)] \approx \boxed{0,984}$.
   On peut aussi calculer directement $p(X \leqslant 8)$ avec la fonction BinomialFRep de la calculatrice (menu Distrib).
   On tape BinomialFrep(n,p,k) pour calculer $p(X \leqslant k)$.

VI Exemple : Bac Métropole juin 2012

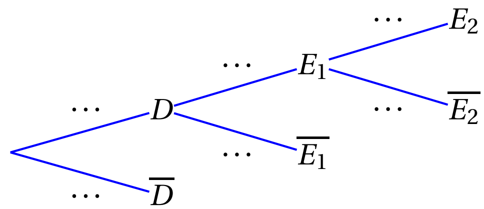
VI.1 Énoncé

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les évènements suivants :

— D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
— E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
— E_2 : « Le candidat est recruté ».

(a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



(b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

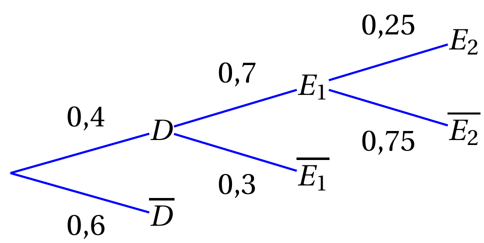
(c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.
(a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
(b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

VI.2 Correction

1. (a)



(b) On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

(c) Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :
$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap \overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93$.
D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1 - p(F) = 1 - 0,93 = 0,07$.
On peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :
$p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.
D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. (a) Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à $0,07$. La variable X suit donc une loi binomiale $(\mathscr{B}, n = 5,\ p = 0,07)$.
(b) On a $p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.

   La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{0}{n} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.

   La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.
   Il faut donc résoudre l'inéquation :
   $1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln)
   $\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$.
   Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx 95,1$.
   Il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.