

TS : exercices de bac (conditionnement et indépendance)

I Antilles-Guyane juin 2015 (extrait)

1. Les événements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :

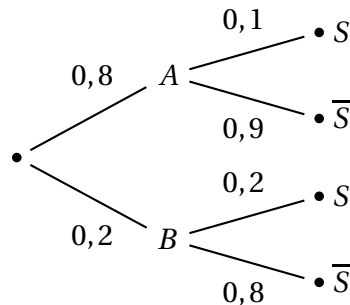
$$P(\text{« A défaillant »}) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = \boxed{0,1521}.$$

2. Ici la probabilité est égale à :

$$P(\text{« A défaillant »}) = P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = \boxed{0,6279}.$$

II Asie juin 2013 (extrait)

1. Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. (a) En suivant la troisième branche :

$$p(B \cap \bar{S}) = p(B) \times p_B(\bar{S}) = 0,2 \times 0,8 = \boxed{0,16}.$$

(b) On calcule de même :

$$p(A \cap \bar{S}) = p(A) \times p_A(\bar{S}) = 0,8 \times 0,9 = 0,72.$$

$\{A; B\}$ étant une partition de l'univers, on a donc :

$$p(\bar{S}) = p(A \cap \bar{S}) + p(B \cap \bar{S}) = 0,72 + 0,16 = \boxed{0,88}.$$

Il faut donc calculer :

$$p_S(B) = \frac{p(S \cap B)}{p(S)}.$$

On a vu que $p(\bar{S}) = 0,88$, donc $p(S) = 1 - p(\bar{S}) = 0,12$.

$$\text{Donc } p_S(B) = \frac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}} \approx 0,33 \text{ au centième près.}$$

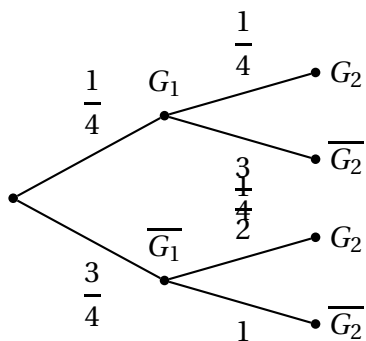
III Liban juin 2018

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^e partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Illustrons la situation par un arbre :

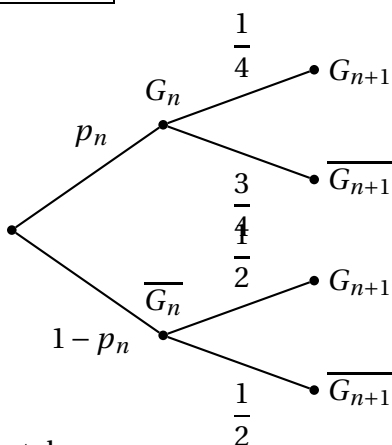


Alors : En appliquant la formule des probabilités totales :

$$p_2 = p(G_2) = p_{G_1}(G_2) p(G_1) + p_{\overline{G_1}}(G_2) p(G_1)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16} \text{ donc } \boxed{p_2 = \frac{7}{16}}$$

2. Arbre :



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n) = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\boxed{p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}}$$

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	$\frac{1}{4}$	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

On peut conjecturer que la suite converge vers 0,4.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5}$

$$= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = \boxed{-\frac{1}{4}u_n} \text{ donc } \boxed{u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n}$$

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $\boxed{q = -\frac{1}{4}}$.

$$(b) u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{20}}.$$

Comme la suite (u_n) est géométrique, on a, pour tout n , $u_n = u_1 q^{n-1} = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

$$\text{On en déduit : } p_n = u_n + \frac{2}{5} = \boxed{\frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}.$$

(c) $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{5} = \boxed{0,4}$ donc la conjecture faite à partir du tableau est validée.

IV Pondichéry avril 2013 (extrait)

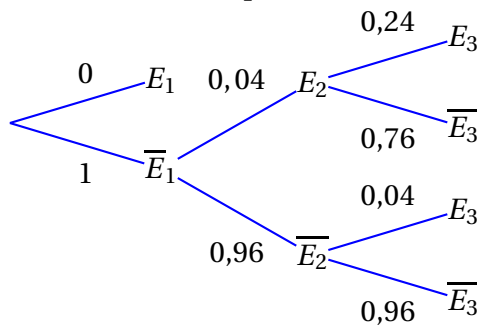
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.



On applique la **formule des probabilités totales** :

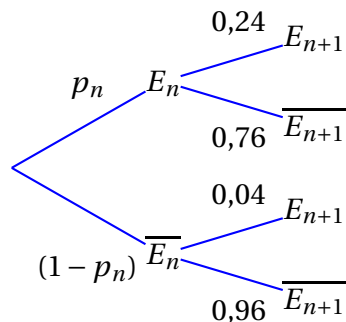
$E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$ (union d'évènements disjoints)

$$p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = \boxed{0,048}.$$

- (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \boxed{0,1}$$

2. (a) Complétons l'arbre



(b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1} \text{ (union d'événements disjoints)}$$

$$p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) = (0,24 - 0,04)p_n + 0,04 = \boxed{0,2p_n + 0,04} \text{ est}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = \boxed{0,2u_n}$$

donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $\boxed{q = 0,2}$.

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\boxed{0,05 \times 0,2^{n-1}}$

et donc : $p_n = u_n + 0,05 = \boxed{0,05(1 - 0,2^{n-1})}$.

(d) Limite de la suite (p_n) .

Comme $|0,2| < 1$ alors par théorème : $\lim (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\boxed{\lim p_n = 0,05}$.

(e) Le nombre J qui est affiché en sortie d'algorithme est le rang du premier terme de la suite (p_n) qui s'approche de la limite $0,05$ à 10^{-K} près, où K est un entier fixé au départ.

La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite vue en (d) ou bien par le théorème de convergence monotone, puisque la suite (p_n) est croissante par hypothèse et majorée par 1 (car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leq 1$).