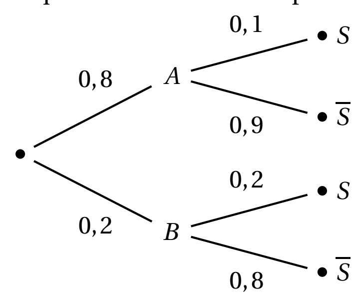
TS : exercices de bac
(conditionnement et indépendance)

I Antilles-Guyane juin 2015 (extrait)

1. Les évènements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :
   $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = \boxed{0,1521}$.
2. Ici la probabilité est égale à :
   $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = \boxed{0,6279}$.
3. $\overline{D_2} = \left(D_1 \cap \overline{D_2}\right) \cup \left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right)$ (réunion d'évenements incompatibles) donc $p\left(\overline{D_2}\right) = p\left(D_1 \cap \overline{D_2}\right) + p\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right)$ d'où :

II Asie juin 2013 (extrait)

1. Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. (a) En suivant la troisième branche :
   $p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,2 \times 0,2 = \boxed{0,04}$.

   (b) On calcule de même :
   $p\left(A \cap \overline{S}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{S}\right) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$.
   $\{A\,;\,B\}$ étant une partition de l'univers, on a donc :
   $p\left(\overline{S}\right) = p\left(A \cap \overline{S}\right) + p\left(B \cap \overline{S}\right) = 0,72 + 0,16 = \boxed{0,88}$.

   Il faut donc calculer :
   $p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)}$.
   On a vu que $p\left(\overline{S}\right) = 0,88$, donc $p(S) = 1 - p\left(\overline{S}\right) = 0,12$.
   Donc $p_S(B) = \dfrac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \dfrac{4}{12} = \boxed{\dfrac{1}{3}} \approx 0,33$ au centième près.

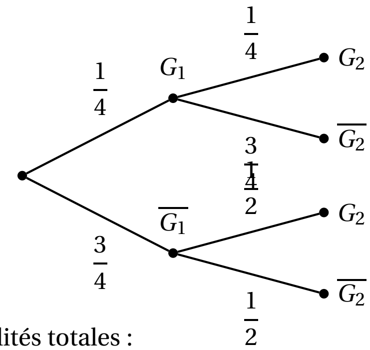
III Liban juin 2018

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- 3. Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

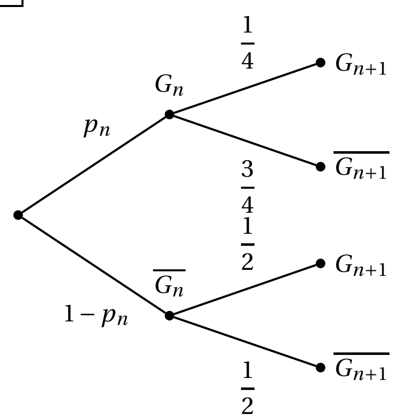
Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^e partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Illustrons la situation par un arbre :



Alors : En appliquant la formule des probabilités totales :
$p_2 = p(G_2) = p_{G_1}(G_2)\,p(G_1)) + p_{\overline{G_1}}(G_2)\,p(G_1)$
$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16}$ donc $\boxed{p_2 = \frac{7}{16}}$

2. Arbre :



D'après la formule des probabilités totales :
$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n) = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$
Donc :

$$\boxed{p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}}$$

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	$\frac{1}{4}$	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

On peut conjecturer que la suite converge vers 4.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5}$
$= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = \boxed{-\frac{1}{4}u_n}$ donc $\boxed{u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n}$.

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $\boxed{q = -\frac{1}{4}}$.

(b) $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \boxed{-\frac{3}{20}}$.

Comme la suite (u_n) est géométrique, on a, pour tout n, $u_n = u_1 q^{n-1} = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

On en déduit : $p_n = u_n + \frac{2}{5} = \boxed{\frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$.

(c) $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{5} = \boxed{0,4}$ donc la conjecture faite à partir du tableau est validée.