Contrôle sur les inéquations du second degré

Exercice I (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x(x-2) < 0$.

b) $2x^2 - 5x + 2 \geqslant 0$.

c) $(4x-5)^2 \geqslant (6x+1)^2$.

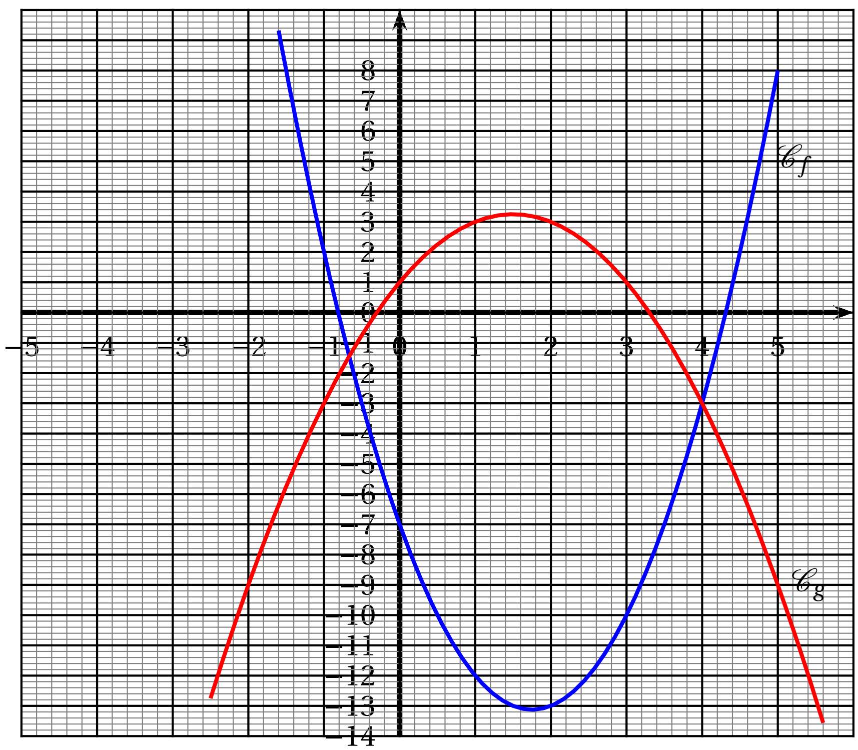
Exercice II (4,5 points)

On veut résoudre l'inéquation $\dfrac{-3x^2-4x+7}{2x+1} \geqslant 0$.

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'expression $\dfrac{-3x^2-4x+7}{2x+1}$.
2. Étudier le signe du numérateur selon les valeurs de x.
3. Étudier le signe du dénominateur.
4. Renseigner un tableau de signes rassemblant les signes du numérateur et du dénominateur.
5. Conclure.

Exercice III (3,5 points)

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 7x - 7$ et $g(x = -x^2 + 3x + 1)$.
Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont représentées ci-dessous.



1. Graphiquement, que peut-on dire de la position relative des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. On veut retrouver ces résultats algébriquement.
   (a) Résoudre l'inéquation $3x^2 - 10x - 8 \geqslant 0$.
   (b) En déduire (**en expliquant le rapport avec la question a)**!) les abscisses des points des courbes pour lesquels $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

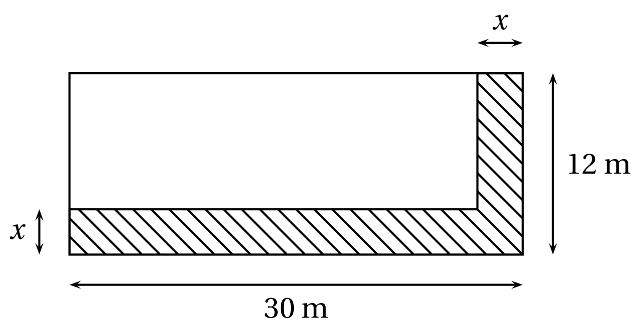
Exercice IV (3 points)

Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et largeur 12m.
On se propose d'aménager un chemin de largeur x (partie hachurée), en mètre, le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure. La largeur x du chemin doit être supérieure à 0,8 m et on souhaite que la partie restante du terrain ait une aire supérieure à 280 m^2 .

a) Indiquer un intervalle dans lequel se trouve la largeur x du chemin.

b) Vérifier que la condition sur l'aire de la partie restante se traduit par l'inéquation $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$.

c) Résoudre cette inéquation et en déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.



Exercice V (3 points)

On veut résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{x} > 0.$$

1. Quel est l'ensemble $\mathscr{D}$ de définition ?
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, cette inéquation équivaut à

$$\frac{-x^2 - x + 1}{x(2x+1)(3x-1)} > 0.$$

3. Étudier le signe du numérateur.
4. Étudier le signe des facteurs du dénominateur.
5. En récapitulant tous les renseignements dans un seul tableau de signe, résoudre cette inéquation.