# Correction du contrôle sur les inéquations du second degré

## Exercice I (6 points)

a) Résolvons $x(x-2)<0$ :
$x(x-2)$ est un polynôme du second degré avec deux racines évidentes 0 et 2.
Il est du signe du coefficient de $x^2$, 1, donc positif, à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatifs entre les racines.
L'ensemble, des solutions est : $\boxed{\mathscr{S} = ]0\,;\,2[}$.

b) Résolvons $2x^2-5x+2 \geqslant 0$.
Le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4\times 2\times 2 = 25-16 = 9 > 0$.
Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{9}}{2\times 2} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{9}}{4} = 2$.
$2x^2-5x+2$ est du signe de 2 (positif) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-5x+2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble, des solutions de l'inéquation est : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right] \cup [2\,;\,+\infty[}$.

c) Résolvons $(4x-5)^2 \geqslant (6x+1)^2$.
$(4x-5)^2 \geqslant (6x+1)^2 \Leftrightarrow (4x-5)^2-(6x+1)^2 \geqslant 0$.
On reconnaît la différence de deux carrés; on applique la troisième identité remarquable. On obtient :
$[(4x-5)+(6x+1)]\,[(4x-5)-(6x+1)] \geqslant 0$
$\Leftrightarrow (4x-5+6x+1)\,(4x-5-6x-1) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow (10x-4)\,(-2x-6) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow 2\,(5x-2)\times 2\,(-x-3) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow 4\,(5x-2)\,(-x-3) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow (5x-2)\,(-x-3) \geqslant 0$ (en divisant par 4, positif).
Il y a deux racines évidentes : $\dfrac{2}{5}$ et $-3$.
Le coefficient de $x^2$ dans l'expression $(5x-2)\,(-x-3)$ est -5, négatif.
L'expression est du signe de - 5, négative, à l'extérieur, des racines est positive entre les racines.
L'ensemble, des solutions de l'inéquation est : $\boxed{\mathscr{S} = \left[-3\,;\,\frac{2}{5}\right]}$.

## Exercice II (4,5 points)

On veut résoudre l'inéquation $\dfrac{-3x^2-4x+7}{2x+1} \geqslant 0$.

1. Une fraction ne peut avoir un dénominateur nul.
   Or $2x+1$ s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$.
   L'ensemble de définition est donc : $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$.

2. Signe de $-3x^2-4x+7$ :
   $\Delta = (-4)^2 - 4\times(-3)\times 7 = 16+84 = 100 > 0$.
   Le numérateur a deux racines : $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{100}}{2\times(-3)} = \dfrac{-6}{-6} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{100}}{-6} = -\dfrac{7}{3}$.
   Il est du signe de -3, négatif, à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et positif entre les racines.

3. $2x+1>0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.

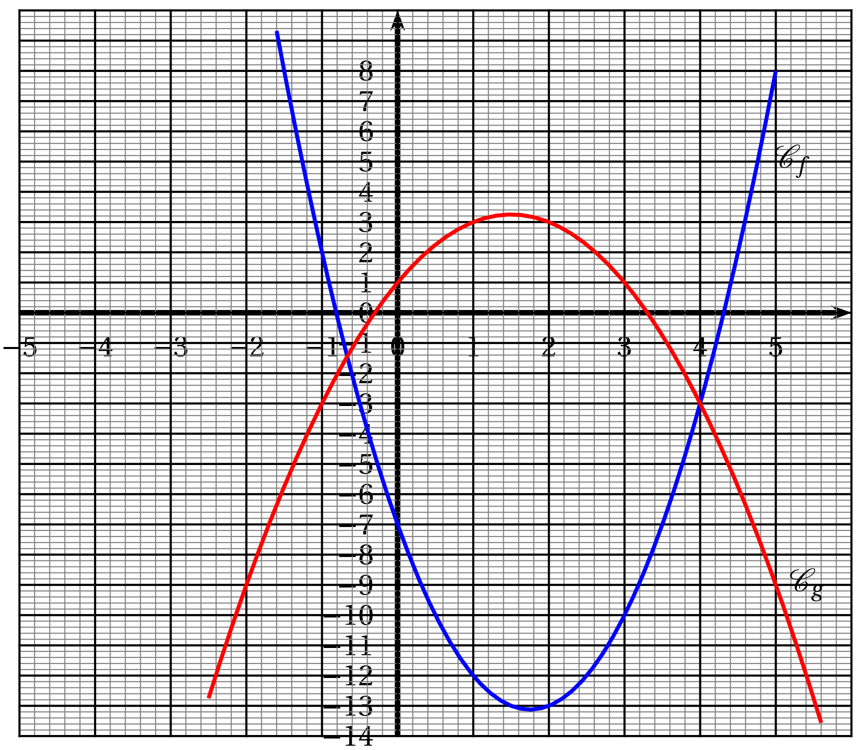
4. Tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{7}{3}$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x^2-4x+7$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2x+1$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $\dfrac{-3x^2-4x+7}{2x+1}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

5. On veut que l'expression soit supérieure ou égale à 0.
   L'ensemble, des solutions est : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{7}{3}\right] \cup \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]}$.

## Exercice III (3,5 points)

On considère les deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2-7x-7$ et $g(x = -x^2+3x+1)$.
Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont représentées ci-dessous.




1. Graphiquement, il semble que $\mathscr{C}$ soit au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $]-\infty\,;\,-0,7] \cup [4\,;\,+\infty]$ et en dessous sur $[-0,6\,;\,4]$.

2. On veut retrouver ces résultats algébriquement.

   (a) Résolvons l'inéquation $3x^2 - 10x - 8 \geqslant 0$.
   $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 100 + 96 = 196 > 0$.
   Il y a deux racines :
   $x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{196}}{2 \times 3} = \dfrac{10-14}{6} = \boxed{-\dfrac{2}{3}}$ et $x_2 = \dfrac{10+14}{6} = \boxed{4}$.
   $3x^2 - 10x - 8$ est du signe de 3, positif, à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.
   L'inéquation a pour solutions : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{2}{3}\right] \cup [4\,;\,+\infty[}$.

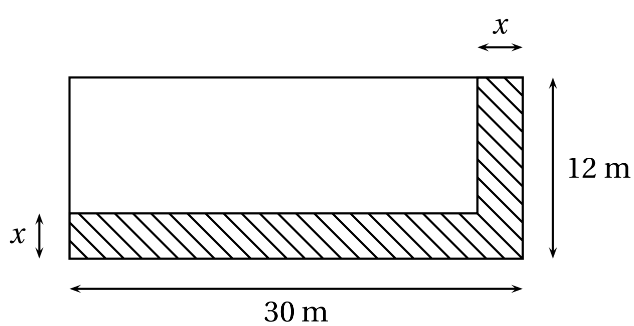
   (b) Les abscisses des points pour lesquels $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sont solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
   Or : $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow 2x^2-7x-7 \geqslant g(x = -x^2+3x+1) \Leftrightarrow 2x^2-7x-7+x^2-3x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{3x^2-10x-8 \geqslant 0}$.
   On retrouve l'inéquation résolue à la question 2. a).
   $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{2}{3}\right] \cup [4\,;\,+\infty[$.
   Comme $-\dfrac{2}{3} \approx -0,7$, on retrouve les résultats trouvés graphiquement.

## Exercice IV (3 points)

a) $x$ doit être supérieur à O,8 et il est clair que $x \leqslant 12$ donc $x \in ]0,8\,;\,12]$.

b) Calculons l'aire de la partie restante; il s'agit d'un rectangle, de longueur $30 - x$ et de largeur $12 - x$.
Son aire vaut $(30-x)(12-x)$.
Cette aire doit être supérieure à 280 donc on a :
$(30-x)(12-x) \geqslant 280 \Leftrightarrow (30-x)(12-x) - 280 \geqslant 0 \Leftrightarrow 360 - 30x - 12x + x^2 - 280 \geqslant 0$
$\boxed{\Leftrightarrow x^2 - 42x + 80 \geqslant 0}$.

c) Résolvons cette inéquation :
$\Delta = (-42)^2 - 4 \times 1 \times 60 = 1764 - 320 = 1444 > 0$.
Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{42 - \sqrt{1444}}{2} = \dfrac{42-38}{2} = \boxed{2}$ et $x_2 = \dfrac{42+38}{2} = \boxed{40}$.
$x^2 - 42x + 80$ est positif (du signe de 1, coefficient de $x^2$) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.
Compte-tenu des conditions trouvées à la question 1., on doit avoir $0,8 \leqslant x \leqslant 2$; $\boxed{x \in [0,8\,;\,2]}$.



## Exercice V (3 points)

On veut résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{x}>0.$$

1. Les trois dénominateurs doivent être différents de 0, or ils s'annulent respectivement pour $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$ et $x=0$.

   l'ensemble de définition est : $\boxed{\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{3}\right\}}$.

2. On suppose que $x\in\mathscr{D}$.

   Alors :

   $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{x}>0$

   $\Leftrightarrow \frac{x(3x-1)}{x(2x+1)(3x-1)}+\frac{x(2x+1)}{x(2x+1)(3x-1)}-\frac{(2x+1)(3x-1)}{x(2x+1)(3x-1)}>0$

   $\Leftrightarrow \frac{x(3x-1)+x(2x+1)-(2x+1)(3x-1)}{x(2x+1)(3x-1)}>0$

   $\Leftrightarrow \frac{3x^2-x+2x^2+x-\left[6x^2-2x+3x-1\right]}{x(2x+1)(3x-1)}>0$

   $\Leftrightarrow \boxed{\frac{-x^2-x+1}{x(2x+1)(3x-1)}>0}$

3. Étudions le signe de $-x^2-x+1$.

   $\Delta=5>0$.

   Il y a deux racines : $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{-2}=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx 0,61$ et $x_2=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx -1,62$.

   Ce numérateur est négatif (du signe du coefficient de $x^2$) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et positif entre les racines

4. 
   - Le signe de $x$ est « évident ».
   - $2x+1>0 \leqslant x>-\frac{1}{2}$
   - $3x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$

5. Tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2-x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $3x-1$ | | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $2x+1$ | | $-$ | | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{-x^2-x+1}{x(2x+1)(3x-1)}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On veut que le quotient soit strictement positif :

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\,-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]\frac{-1}{2}\,;\,-0\right[\cup\left]\frac{1}{3}\,;\,-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[}$