Rappels sur la fonction exponentielle

I Définition et propriétés

Il existe une fonction unique f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

Cette fonction s'appelle fonction exponentielle et est notée exp.

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$

Propriété

$\exp' = \exp > 0$ donc la fonction exp est croissante.

II Propriétés algébriques

II.1 Relation fonctionnelle

Relation fonctionnelle

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: $\exp(x) \times \exp(y) = \exp(x+y)$

II.2 Exponentielle d 'une différence

Propriété

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: $= \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

II.3 Exponentielle et puissances

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left[\exp(x)\right]^n = \exp(nx)$

Justification :on effectue une démonstration par récurrence et on applique la propriété fonctionnelle.

II.4 Notation e^x

Définition et notation

On appelle e le nombre e^1 donc $e^1 = e$.

Remarque :

$e \approx 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709370000$. (Avec 50 décimales)

$e \approx 2{,}72$ suffit la plupart du temps!

e est un nombre irrationnel (pas de période dans l'écriture décimale) et c'est même un nombre transcendant (solution d'aucune équation polynomiale, comme π)

D'après la propriété précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \left[\exp(1)\right]^n = e^n$.

On admet que l'on peut généraliser cette notation, en posant :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp(x) = e^x}$

III Propriétés algébriques avec cette nouvelle écriture

Résumé des propriétés :

Pour tout réel x :

- $\exp(x) > 0$
- $\exp(0) = 1$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\exp'(x) = \exp(x)$

IV Étude de la fonction exponentielle :

IV.1 Sens de variation :

Propriété

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$, donc pour tout réel x, $\exp'(x) > 0$ puisque $\exp(x) > 0$. La fonction exp est donc croissante.

IV.2 Limites à l'infini

Théorème (admis)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

Conséquences :

1. Pour tout $a > 0$, $\exp(a) > 0$
2. Pour tous réels a et b, $\exp a = \exp b \Leftrightarrow a = b$.
3. Pour tous réels a et b, $\exp a < \exp b \Leftrightarrow a < b$.

Démonstration :

1. exp est croissante et $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ donc exp est une fonction positive.
2. (a) $a = b \Rightarrow \exp(a) = \exp(b)$ comme pour n'importe quelle fonction.
   (b) $\exp(a) = \exp(b) \Rightarrow a = b$ car la fonction exp est croissante
3. Même démonstration que dans le cas d'égalité

V Croissances comparées

Propriété

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

VI Courbe représentative $\mathscr{C}$

Remarques :

- la tangente à $\mathscr{C}$ en 0 passe par le point de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$
- la tangente à $\mathscr{C}$ en 1 passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x>0}$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses, qui est asymptote à la courbe en $-\infty$.

Justification :

- la tangente à $\mathscr{C}$ en 0 a pour équation $= y = exp'(0)(x-0) + \exp(0) \iff \boxed{y = x + 1}$
- la tangente à $\mathscr{C}$ en 1 a pour équation $= y = exp'(1)(x-1) + \exp(1) \iff y = \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e} \iff \boxed{y = \mathrm{e}x}$; cette tangente passe donc par l'origine du repère.