Mathématiques spécifiques : correction de la feuille d'exercices n° 3 (dérivavion globale)

Exercice I

Lors du transport de l'électricité depuis un générateur vers un récepteur, les câbles électriques fonctionnent comme des résistances et dissipent par effet Joule une partie de l'énergie destinée au récepteur. La puissance perdue par effet Joule dépend de l'intensité du courant et de la résistance du câble.

1) Dans un réseau électrique donné dont l'intensité peut varier entre 1 A et 5 A, on a obtenu la formule suivante, reliant la puissance P dissipée, en watts, et l'intensité I du courant, en ampères :

$$P(I) = 0,3I^2 - 2,4I + 9.$$

$P'(I) = 0,6I - 2,4$.
Or $0,6I - 2,4 = 0 \iff 0,6I = 2,4$

I	1		4		5
$P'(I)$		$-$	0	$+$	
$P(I)$		↘		↗	

La puissance dissipée est donc minimale lorsque l'intensité est égale à 4 Ampères.

2) Dans un second réseau électrique différent du premier, l'intensité peut varier entre 1 A et 4,5 A, et on a :

$$P(I) = 0,3I^2 - 3I + 14.$$

$P'(I) = 0,6I - 3$.
Or $0,6I - 3 = 0 \iff 0,6I = 3 \iff I = 30,6 = 5$.
On a donc :

I	1		4,5
$P'(I)$		$-$	
$P(I)$		↘	

Exercice II

Une coopérative laitière produit et vend jusqu'à 2 000 litres de lait par jour. La fonction f, définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$, modélise le bénéfice journalier réalisé, en centaines d'euros, en fonction de la quantité de lait x produite et vendue, en milliers de litres.

1) $f'(x) = x^2 - 6x + 8$.
Or $(x-2)(x-4) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8 = f'(x)2$.
$x - 2 > 0 \iff x > 2\,;\, x - 4 > 0 \iff x > 4$

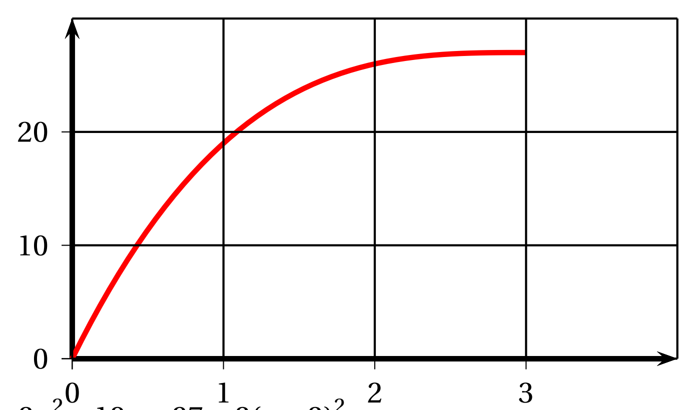
x	0		2		4
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x-4$		$-$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗		↘	

2) Sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ le bénéfice journalier est croissant.

3) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,3]$, donc le bénéfice journalier va diminuer pour chaque litre supplémentaire produit et vendu entre 2 000 et 3 000 litres.

Exercice III

La population d'abeilles dans un rucher a été étudiée pendant trois ans.
Les résultats obtenus ont permis de réaliser la courbe suivante.



$f'(x) = 3x^2 - 18x + 27 = 3(x-3)^2$.
Donc $f'(x)$ est positif pour tout réel x.
f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi la population d'abeilles va croître au-delà des trois premières années.

Exercice IV Coût marginal et coût moyen minimum

Une entreprise fabrique un produit cosmétique. Son coût total de fabrication C_T , en milliers d'euros, dépend de la quantité q, en tonnes, de produit fabriqué.
Il peut être modélisé par la fonction C_T définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$C_T(q) = q^3 - 12q^2 + 60q.$$

1) $C'_T(q) = 3q^2 - 24q + 60 = 3\left(q^2 - 8q + 20\right) = 3\left[(q-4)^2 - 16 + 20\right] = \boxed{3(q-4)^2 + 12}$

2) $3(q-4)^2 + 12 > 0$ donc C_T est croissante.

3) Le coût moyen par tonne est égal à : $C_M(q) = \dfrac{C_T(q)}{q}$, avec $q > 0$.

   a) $C_M(4) = \dfrac{C_T(4)}{4} = \dfrac{112}{4} = \boxed{28}$.
   Si l'entreprise fabrique 4 tonnes de produit, le coût moyen par tonne est égal à 28 000 euros.

   b) $\boxed{C_M(q) = q^2 - 12q + 60}$.

   c) $\boxed{C'_M(q) = 2q - 12}$.
   Donc $C'_M(q) > 0 \iff 2q - 12 > 0 \iff q > 6$

q	0		6		10
$C'_M(q)$		$-$	0	$+$	
C_M		$\searrow$	24	$\nearrow$	

   Le coût moyen est donc minimal lorsque l'entreprise fabrique 6 tonnes de produit.

4) Le coût marginal de fabrication est le coût induit par une variation de la production. Il peut se calculer en dérivant le coût total. On a $C_m(q) = C'_T(q)$.
   $C_m(q) = 3q^2 - 24q + 60$

5) $C_m(q) = C_M(q) \iff 3q^2 - 24q + 60 = q^2 - 12q + 60 \iff 2q^2 - 12q = 0 \iff 2q(q-6) = 0 \iff q = 0$ ou $q = 6$.
   Donc, sur l'intervalle $]0\,;\,10]$, l'équation a pour solution $q = 6$.

6) D'après la question précédente, on remarque que le coût moyen et le coût marginal sont égaux pour une fabrication de 6 tonnes de produit. Or, d'après la question 1. b), le coût moyen est minimal pour une telle quantité fabriquée. Donc l'affirmation est **vraie**.