Rappels sur les fonctions affines

Table des matières

I Définition :

Définition

Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est affine s'il existe deux réels m et p tel que, pour tout x, $f(x) = mx + p$.
m s'appelle le coefficient directeur et p est l'ordonnée à l'origine.

Exemples :

- $f : x \mapsto 2x + 3$ est une fonction affine car $2x + 3 = mx + p$ avec $\begin{cases} m = 2 \\ p = 3 \end{cases}$.
- $f : x \mapsto \dfrac{3x+5}{7}$ est une fonction affine car $\dfrac{3x+5}{7} = \dfrac{3}{7}x + \dfrac{5}{7} = mx + p$ avec $\begin{cases} m = \dfrac{3}{7} \\ p = \dfrac{5}{7} \end{cases}$.
- $f : x \mapsto 5x$ est une fonction affine car $5x = mx + p$ avec $\begin{cases} m = 5 \\ p = 0 \end{cases}$

  On dit alors que f est **linéaire** (fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est égale à 0)
- $f : x \mapsto 8$ est une fonction affine car $5x = mx + p$ avec $\begin{cases} m = 5 \\ p = 0 \end{cases}$.

  Cette fonction est une fonction **constante**.
- $f : x \mapsto 3x^2 + 7$ n'est pas une fonction affine car il n'existe pas de nombres m et p constants tels que $mx + p = 3x^2 + 7$ pour tout x. (à cause de x^2)

Calcul d'une image :
Exemple : Calculons l'image de 3 par la fonction affine

$$f(3) = 5 \times 3 + 4$$
$$f(3) = 15 + 4$$
$$f(3) = 19$$

Calcul d'un antécédent :
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 7x + 3$.
Cherchons l'antécédent de 5.
On cherche l'antécédent de 5 par la fonction f, c'est-à-dire le nombre x tel que $f(x) = 5$. Or, la fonction f est définie par :

$$f(x) = 7x + 3$$

Par conséquent, on a :

$$7x + 3 = 5$$
$$7x = 2$$
$$x = \frac{2}{7}$$

L'antécédent de 5 par f est $\frac{2}{7}$.

II Variations

Théorème

Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = mx + p$.

- f est croissante si, et seulement si, $m > 0$.
- f est constante si, et seulement si, $m = 0$.
- f est décroissante si, et seulement si, $m < 0$.

Tableaux de variations de f, selon le signe de m.

Pour $m > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Pour $m < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

III Signe d'une fonction affine

D'après les tableaux de variation d'une fonction affine, on en déduit les tableaux de signes suivants :

Cas : $m > 0$

x	$-\infty$ $-\dfrac{p}{m}$ $+\infty$
$f(x) = mx + p$	$-$ 0 $+$

Cas : $m < 0$

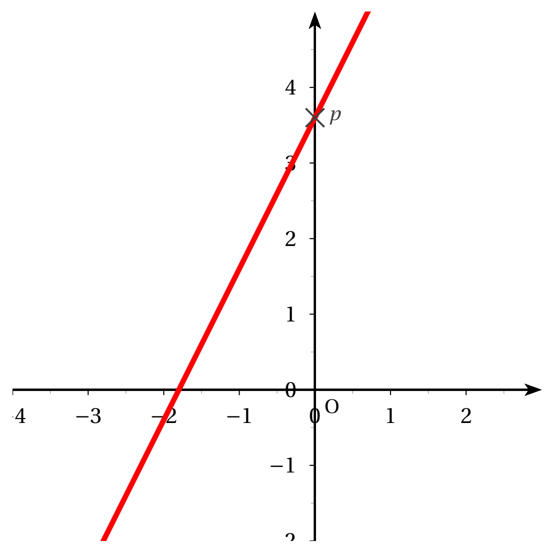
x	$-\infty$ $-\dfrac{p}{m}$ $+\infty$
$f(x) = mx + p$	$+$ 0 $-$

IV Représentation graphique d'une fonction affine

Propriété

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite, sécante à l'axe des ordonnées. m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire que la droite passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ p)$ (car $f(0) = p$)

Interprétation graphique de p :



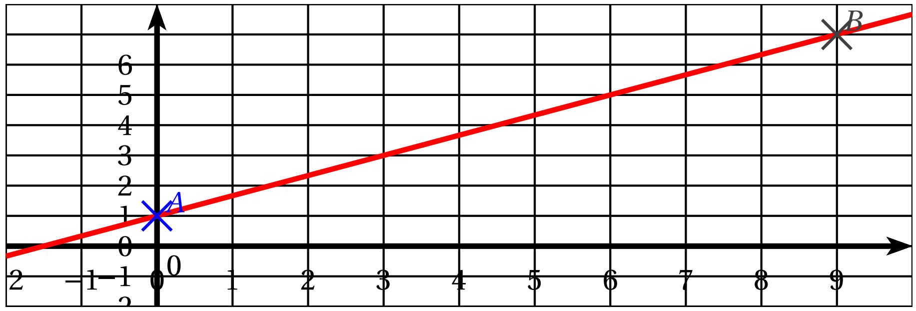
Remarque : toute droite sécante à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

V Comment tracer graphiquement la représentation graphique d'une fonction affine?

Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points de celle-ci.
On choisit deux valeurs der x quelconques et on calcule les ordonnées y correspondantes.

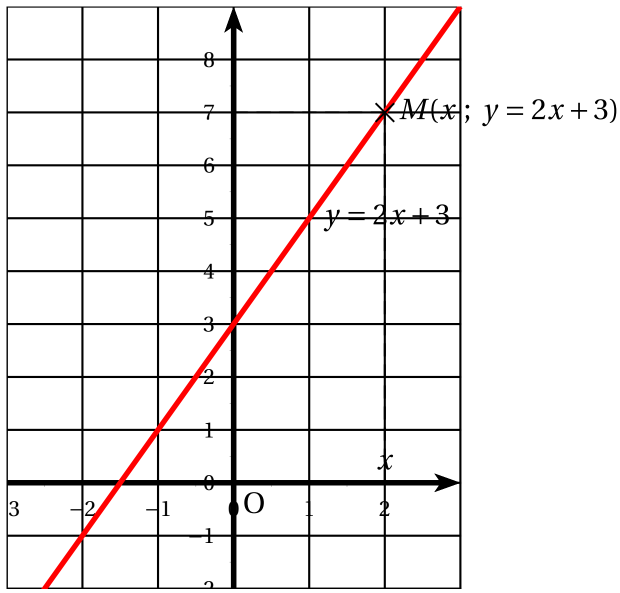
Exemple : on veut représenter graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto \dfrac{2}{3}x + 1$. La représentation graphique de f est une droite.
L'ordonnée à l'origine vaut 1, donc la droite passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$. On remarque qu'il suffit de prendre x multiple de 3 (x pas trop proche de 0, pour accroître la précision du tracé.) On remplit un tableau :

x	0	9
$y = \dfrac{2}{3}x + 1$	1	$\dfrac{2}{3} \times 9 + 1 = 7$



Remarque : La représentation graphique d'une fonction affine $f \mapsto ax+b$ est une droite (sécante à l'axe de l'axe des ordonnées (Oy)) ; on dit que cette droite a pour **équation réduite** $\boxed{y=ax+b}$.

Exemple : La droite d'équation $y=2x+3$ est la représentation graphique de la fonction $f \mapsto 2x+3$.



Exemple : Trouver l'équation de la droite passant par les points A(2 ; 5) et B(7 ; −1). C'est la même chose que de chercher la fonction affine f vérifiant $f(2)=5$ et $f(7)=-1$. Notons m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine. $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-1-5}{7-2}=-\dfrac{6}{5}$. L'équation de la droite est alors $y=-\dfrac{6}{5}x+p$. A appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient cette équation : $y_A=-\dfrac{6}{5}x_A+p$ donc $5=-\dfrac{6}{5}\times 2+p$.
D'où $-\dfrac{12}{5}+p=5$ et $p=5+\dfrac{12}{5}=\dfrac{25+12}{5}=\dfrac{37}{5}$.
L'équation de la droite (AB) est $\boxed{y=-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{37}{5}}$.