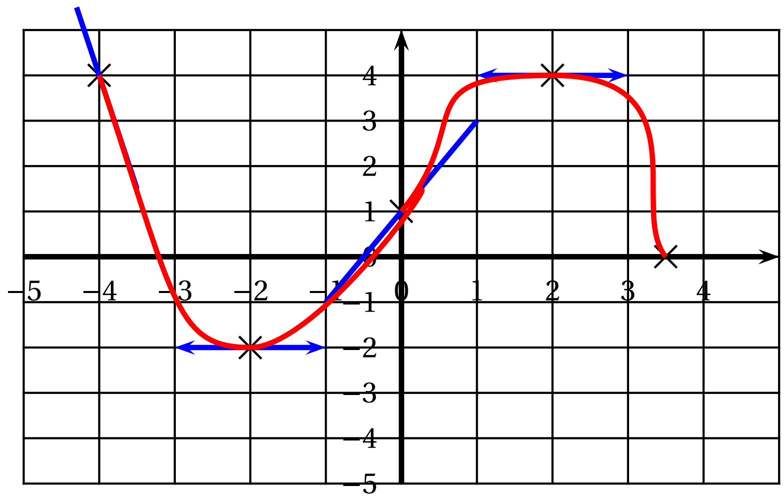
Maths spécifiques : correction de la feuille d'exercices n° 3

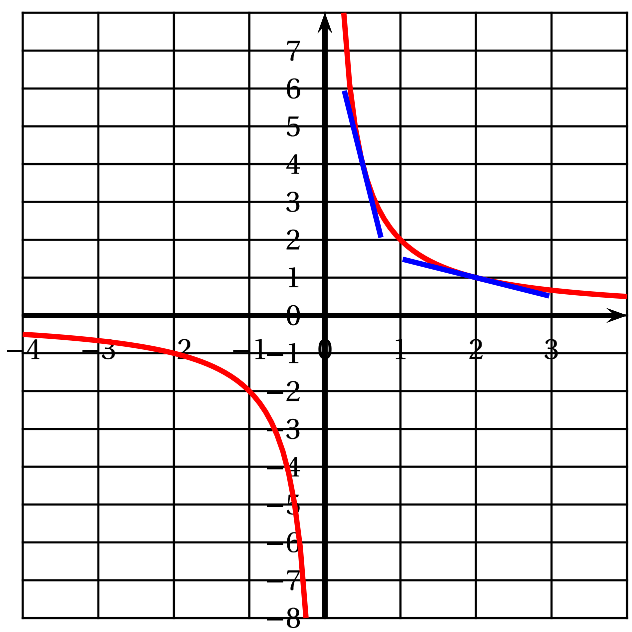
Exercice I

Tracer une représentation graphique d'une fonction f vérifiant les données suivantes :
$f(2)=4$; $f(0)=1$; $f(3,5)=0$; $f(-4)=4$;
$f(-2)=-2$; $f'(-2)=f'(2)=0$; $f'(-4)=-5$; $f'(0)=2$.
La courbe doit passer par les points de coordonnées (-4 ; 4), (-2 ; -2), (0 ; 1), (2,4) et (3,5 ; 0).
Les tangentes en -4, -2, 0 et 2 doivent avoir respectivement des coefficients directeurs égaux à -5, 0, 2 et 0.
Voici une courbe possible.



Exercice II

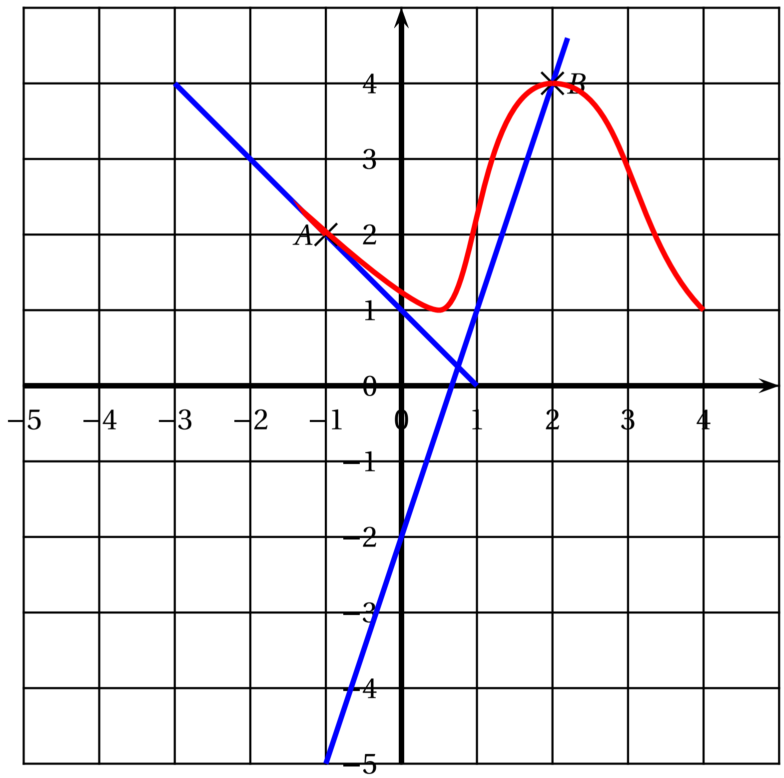
On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2}{x}$.



Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses $\dfrac{1}{2}$ et 2 sont tracées en bleu.

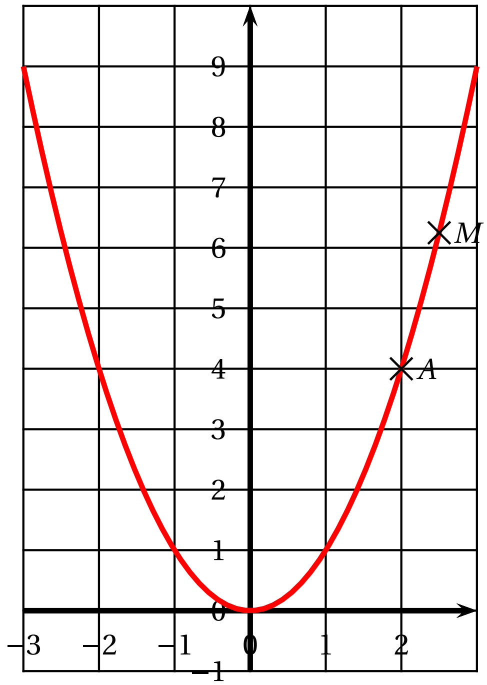
Exercice III

Représentons une fonction dont la droite d'équation $y = -x+1$ est tangente à la courbe au point d'abscisse -1 et la droite d'équation $y = 3x - 2$ est une sécante aux points d'abscisses 1 et 2.
La droite d'équation $y = -x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -1, donc ce point appartient aussi à la tangente.
Son ordonnée vaut $y_A = --(-1)+1 = 1+1 = 2$. Elle est tangente en $A(-1\ ;\ 2)$
La droite d'équation $y = -x - 2$ est sécante à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 2, donc ce point appartient aussi à la sécante.
Son ordonnée vaut $y_B = 3 \times 2 - 2 = 4$. Elle coupe la courbe en $B(2\ ;\ 4)$.
Une courbe possible est tracée en rouge ci-dessous.



Exercice IV

Soit f la fonction carré : $x \mapsto x^2$. On note $\mathscr{P}$ la parabole représentative de f.
Soit A de $\mathscr{P}$ le point d'abscisse 2.
On considère un point $\mathscr{P}$ d'abscisse x.



1) L'ordonnée de M est $f(x) = x^2$.

2) Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x+3$.

3) Lorsque x tend vers 3, $x+3$ tend vers 6.

4) On en déduit : $\boxed{f'(2) = 6}$

5) On prend cette fois un point A de $\mathscr{P}$ d'abscisse a, a étant une valeur quelconque.
L'ordonnée de A est a^2.

6) On reprend le point M de $\mathscr{P}$ d'abscisse x.
Le coefficient directeur de la sécante (AM) est $\dfrac{x^2 - a^2}{x-a} = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \boxed{x+a}$

7) Lorsque x tend vers a,ce quotient tend vers $2a$.

8) On en déduit $\boxed{f'(a) = 2a}$