Mathématiques spécifiques : correction du contrôle sur la dérivation

Exercice I (1 point)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 1$.
Parmi les expressions suivantes, laquelle est celle de la dérivée de f ?

$\boxed{f'(x) = 8x = j(x)}$

Exercice II (2 points)

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 6x^3 - 1,5x^2 + 12.$$

$f'(x) = 6 \times 3x^2 - 1,5 \times 2x = \boxed{18x^2 - 3x}$

Exercice III (2 points)

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est $f'(x) = (x+3)(x-2)$.
$f'(x)$ s'annule pour $x = -3$ ou $x = 2$.
$\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes horizontales, une en $x = -3$ et l'autre en $x = 2$.

Exercice IV (2 points)

$h'(x) = 3x^2 - 300 = 3\left(x^2 - 100\right) = 3(x+10)[x-10)$.
$h'(x) = 0$ pour $x = -10$ ou $x = 10$.
$\mathscr{C}_h$ admet deux tangentes horizontales, en $A(-10\ ;\ 2002)$ et $B(10\ ;\ -1998)$.

Exercice V (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [-2; 2] par $f(x) = x^3 + 0,5x^2 - 4x + 1$.

1) $\boxed{f'(x) = 3x^2 + x - 4}$

2) $f'(x) = (3x+4)(x-1) = 3x^2 - 3x + 4x - 4 = 3x^2 + x - 4 = f'(x)$
   donc $\boxed{f'(x) = (3x+4)(x-1)}$.

3) a) • $3x + 4 = 0 \iff x = -\dfrac{4}{3}$
   • $3x + 4 > 0 \iff x > -\dfrac{4}{3}$

   b) • $x - 1 = 0 \iff x = 1$
   • $x - 1 > 0 \iff x > 1$

   c) Tableau de signes de $f'(x)$:

x	-2		$-\frac{4}{3}$		1		2
$3x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   d) Tableau de variations de f :

x	-2		$-\frac{4}{3}$		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↗	$\frac{131}{27} \approx 4,8$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	3

   e) • $f(-2) = 3$
   • $f\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{131}{27}$
   • $f(1) = -\dfrac{3}{3}$
   • $f(2) = 3$

   On en déduit que le minimum de f sur $[-2\ ;\ 2]$ est $-\dfrac{3}{2}$ et le maximum $\dfrac{131}{27}$

Exercice VI (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 30x + 1.$$

1) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{9}{2} \times 2x - 30 = \boxed{3x^2 - 9x - 30 = 3\left(x^2 - 3x - 10\right)}$

2) $3(x-5)(x+2) = 3\left[x^2 + 2x - 5x - 10\right] = 3\left(x^2 - 3x - 10\right) = f'(x)$
   donc $\boxed{f'(x) = 3(x-5)(x+2)}$

3) Le signe de $f'(x)$ est-il le même que celui de $(x-5)(x+2)$ car 3 est positif.

4) • $x - 5 = 0 \iff x = 5$ et $x - 4 > 0 \iff x > 5$
   • $x + 2 = 0 \iff x = -2$ et $x + 2 > 0 \iff x > -2$.

5) Tableau de signes de $f'(x)$ ety de variation :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$=$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	35	↘	$-\frac{273}{2}$	↗	

Exercice VII (4 points)

Suite à une épidémie dans une région, le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est modélisé par $f(t) = 45t^2 - t^3 + 100$, pour tout t appartenant à $[0\,;\,45]$.

1) Le nombre de personnes malades prévu par ce modèle au bout de 10 jours est $\boxed{f(10) = 3\,600}$

2) $f'(t) = 45 \times 2t - 3t^2 = 90t - 3t^2 = \boxed{3t(30-t)}$

3) • $3t^2 = 0$ pour $t = 0$ et $3t^2 \geqslant 0$ pour tout t.
   • $30 - t = 0 \iff t = 30$ et $30 - t \geqslant 0 \iff 30 \geqslant t \iff t \leqslant 30$
   • Tableau de signes et de variation :

t	0		30		45
$3t^2$	|	$+$	|	$+$	
$30-t$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	100	↗	$13\,600$	↘	100

4) Ld nombre de personnes malades est maximal le trentième jours et est égal à 13 600.