Mathématiques complémentaires : contrôle sur les suites

Exercice I (2 points)

1. Soit la suite (u_n) définie par. $u_n = 3n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

   Calculer u_1, u_2 et u_3

Exercice II (2 points)

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 5$.
   Calculer u_5.
2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
   Calculer u_5.

Exercice III (3 points)

Étudier les variations des suites (u_n) suivantes définies par :

1) $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 3n + 5 \end{cases}.$

2) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Exercice IV (2 points)

Le nombre $12 + 17 + \cdots + 67$ est la somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique.
On pose $u_0 = 12$.

1. Quelle est la raison de cette suite ?
2. Quel est le rang du dernier terme 67 ?
3. Calculer alors S.

Exercice V (2 points)

Soit $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{19683}$ la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Quelle est la raison q de cette suite ?
2. On pose $u_0 = \dfrac{1}{3}$.
   On sait que $3^9 = 19683$; quel est le rang n du terme $u_n = \dfrac{1}{19683}$.
3. En déduire la valeur de S.

Exercice VI (4 points)

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ dans les cas suivants (en **justifiant soigneusement** !) :

a) $u_n = (3n+2)(-5n+1)$

b) $u_n = 2 + 5^n$

c) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$

d) $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 3}{2n^2 + 7}$

e) $u_n = \dfrac{3n+1}{n^2+1}$

Exercice VII (5 points)

Le gazon d'un champ de 5000 m^2 est envahi par des pissenlits qui détruisent 20 % de la surface en un an.
Chaque automne, Catherine arrache 250 m^2 de pissenlits afin de semer de la pelouse.
On pose $p_0 = 5\,000$ la surface initiale en m^2 de pelouse et p_n la surface à la fin de n années où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la surface de pelouse au bout d'une et deux années.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = 0,8p_n + 250$.
3. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par $v_n = p_n - 1\,250$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$.
   Déterminer son premier terme v_0.
   (b) Donner l'expression du terme général v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire une expression de p_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Quel est le sens de variation de la suite (p_n) ?
5. Quelle sera l'aire de gazon sans pissenlit au bout de 10 ans ?
6. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.
7. Donner une interprétation concrète de cette limite.

Exercice facultatif (2 points)

Deux amis partent pour une randonnée de 200 km.
Le premier jour, ils marchent 20 km. En raison de la fatigue, la distance parcourue diminue de 5 % par jour.
Déterminer en combien de jours ils termineront leur randonnée.