

## Correction de la feuille d'exercices sur le nombre dérivé d'une fonction

### Exercice I

Déterminer la dérivée en  $a \in \mathcal{D}$  (où  $\mathcal{D}$  est l'ensemble de définition de  $f$ ) des fonctions suivantes :

- a)  $f(x) = 3x + 5$ ;  $f'(x) = 3$
- b)  $f(x) = x^3$ ;  $f'(x) = 3x^2$
- c)  $f(x) = 8$ ;  $f'(x) = 0$
- d)  $f(x) = x^7$ ;  $f(x) = x^n$  avec  $n = 7$ ;  $f'(x) = nx^{n-1}$  donc  $f'(x) = 7x^6$
- e)  $f(x) = \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^n}$  avec  $n = 4$ ;  $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{4}{x^5}$
- f)  $f(x) = -3 + 2x$ ;  $f'(x) = 2$
- g)  $f(x) = x^{15}$ ;  $f'(x) = 15x^{14}$
- h)  $f(x) = 12x$ ;  $f'(x) = 12$
- i)  $f(x) = x^{25}$ ;  $f'(x) = 25x^{24}$
- j)  $f(x) = x^6$ ;  $f'(x) = 6x^5$
- k)  $f(x) = x^3$ ;  $f'(x) = 3x^2$
- l)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ;  $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$

### Exercice II

- a) Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ . Pour tout  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  donc  $f'(2) = -\frac{1}{4}$
- b) Soit  $f : x \mapsto 8x + 12$ . Pour tout  $x$ ,  $f'(x) = 8$  donc  $f'(7) = 8$
- c) Soit  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ . Pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  donc  $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$
- d) Soit  $f : x \mapsto x^2$ . Pour tout  $x$ ,  $f'(x) = 2x$  donc  $f'(10) = 20$
- e) Soit  $f : x \mapsto x^3$ . Pour tout  $x$ ,  $f'(x) = 3x^2$  donc  $f'(7) = 243$
- f) Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ . Pour tout  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$  donc  $f'(3) = -\frac{2}{27}$

g) Soit  $f : x \mapsto 2$ . Pour tout  $x$ ,  $f'(x) = 0$  donc  $f'(17) = 0$

h) Soit  $f : x \mapsto x^6$ . Pour tout  $x$ ,  $f'(x) = 6x^5$  donc  $f'(1) = 6$

### Exercice III

Soit  $f : x \mapsto x^2 - 4x + 1$ .

- $f'(x) = 2x - 4$  donc  $f'(3) = 2$
- $f(3) = -2$
- L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en 3 est :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  avec  $a = 3$  donc  $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$ .  
Donc  $y = 2(x - 3) - 2 \Leftrightarrow y = x - 2x - 8$

### Exercice IV

Soit  $h : x \mapsto 4x - 2$ .  $h$  est affine donc sa tangente  $T$  est mal courbe représentative de  $h$ .

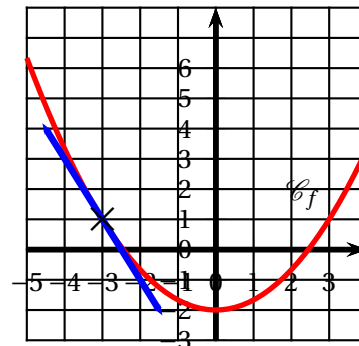
L'équation de la tangente en tout point est  $y = 4x - 2$

### Exercice V Lecture graphique

Sur la figure ci-dessous, on a représenté en rouge la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$ .

La droite  $d$  représentée en bleu est tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $A(-3; 1)$ .

D'après ce graphique, que vaut la dérivée de  $f$  en  $-3$ ?



La tangente passe par les points de coordonnées  $(-3; 1)$  et  $(-2; -1)$ .

Le coefficient directeur est  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$ .

$f'(-3) = -2$

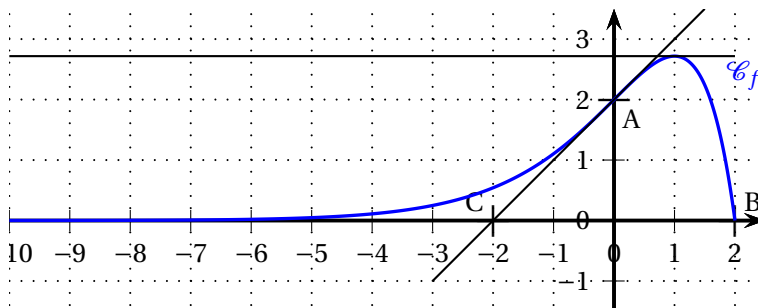
## Exercice VI

### Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-10; 2]$ . On a placé les points  $A(0; 2)$ ,  $B(2; 0)$  et  $C(-2; 0)$ .

On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- La tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

- $f(0) = y_A = 2$ ;  $f(0) = 2$   
 •  $f(2) = y_B = 0$ ;  $f(2) = 0$
- $f'(1)$  est le coefficient directeur de la tangente en 1.  
 $f'(1) = 0$  (tangente horizontale)
- Une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A est :  
 $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ .  
 $f'(1) = \frac{y_A - y_C}{x_C - x_A} = \frac{2}{-2} = -1$ ;  $f'(1) = -1$  On en déduit :  
 $y = -1 \times (x-1) + 2 \iff y = -x + 3$ .
- L'équation  $f(x) = 1$  semble avoir deux solutions.
- $f$  semble croissante sur  $[-10; 1]$  puis décroissante sur  $[1; 2]$ .

### Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.

On sait désormais que la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[-10; 2]$  par :  $f(x) = (2-x)e^x$ .

- $f(0) = 2e^0 = 2$ ;  $f(0) = 2$   
 •  $f(2) = 0$   
 item  $f = uv$  donc  $f' = u'v + uv'$  avec  

$$\begin{cases} u(x) = x-2 \\ v(x) = e^x \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$$

Alors :  $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = [-1+2-x]e^x$   
 donc  $f'(x) = (1-x)e^x$ .

(a) Alors :  $f'(1) = 0 \times e^1 = 0$ ;  $f'(1) = 0$

- Une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0 est :  
 $y = f'(0) \times x + f(0) \iff y = 1x + 2 \iff y = x + 2$ .
- (a)  $f'(x) = (1-x)e^x$  est du signe de  $1-x$  car  $e^x > 0$ .  
 $f'(x) \geq 0$  pour  $x \leq 1$  et  $f'(x) \leq 0$  pour  $x \geq 1$ .

**Tableau de variation :**

$x$	-10	1	2
$f'(x)$	$12e^{-10} \approx 0,0005$	$e$	0

- (b) Sur  $[-10; 1]$ ,  $f(x)$  pass d'environ 0;0005 à  $e \approx 2,7$  donc passe par 1; sur  $[1; 2]$ ,  $f(x)$  passe de  $e$  à 0 donc passe par 1.  
 L'équation  $f(x) = 1$  a donc deux solutions.  
 À la calculatrice, on trouve que les deux solutions sont  $x_1 \approx -1,15$  et  $x_2 \approx 1,84$ .  
**Remarque** : nous verrons cette démarche plus en détail dans un prochain chapitre.