# Feuille d'exercices sur les lois à densité

## A Notion de densité

### A-I

Soit $k$ un un nombre réel.
On considère la fonction $f$ définie par :
$f(x)=\begin{cases} kx^4 \text{ si } x \in [0~;~1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer la valeur de $k$ pour que $f$ soit une fonction de densité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. On prendra pour $k$ la valeur trouvée précédemment.
   Calculer :
   - $p(X \in [0~;~0,3])$
   - $p(X \leqslant 0,6)$
   - $p(X \geqslant 0,5)$
   - $p(0,8 < X < 0,9)$

### A-II

On considère la fcontion définie par
$f(x)=\begin{cases} 5x^4 \text{ si } x \in [0~;~1] \\ 0 \text{ si } x \notin [0~;~1] \end{cases}$.

1. Vérifier que $f$ est une fonction densité.
2. Déterminer la fonction de répartition $F$ de la variable aléatoire $X$ de densité $f$.
3. Calculer $p(0,4 \leqslant X~;~0,5)$.

### A-III

On considère la fonction définie par
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} \text{ si } x \in [0~;~1] \\ 0 \text{ si } x \notin [0~;~1] \end{cases}$.

1. Représenter cette fonction dans un repère orthonormé.
2. Expliquer pourquoi cette fonction n'est pas une fonction de densité.
3. Retrouver ce résultat en calculant $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

## B Loi uniforme

### B-I

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0~;~1]$.
Calculer :

- $p(X \leqslant 0,9)$
- $p(0,2 \leqslant X \leqslant 0,8)$

### B-II

La variable aléatoire $X$ suit la loi uniforme sur $[a~;~b]$.
On sait que $E(X)=5$ et $V(X)=\dfrac{1}{3}$.
Que valent $a$ et $b$ ?

### B-III

Une élève de terminale part toujours en avance de chez elle pour aller au lycée.
Elle prend le bus. Suivant les aléas de trafic, elle arrive entre 5 et 20 minutes avant l'ouverture du portail.
En modélise son temps d'attente devant le lycée, par une variable aléatoire, $T$ qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[5~;~20]$.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ait plus d'un quart d'heure d'avance ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ait exactement cinq minutes d'avance ?
3. Quel est son temps moyen d'attente ?

## C Loi exponentielle

### C-I

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont des fonctions de densité d'une variable aléatoire qui suivent une fonction exponentielle :

a) $f(x):\begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

b) $f(x): \begin{cases} 0,5\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

c) $f(x): \begin{cases} \dfrac{2}{(\mathrm{e}^{x})^2} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

## C-II

La variable aléatoire $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$.

1. Déterminer son espérance.
2. Calculer $p(X \leqslant 1)$ puis $p(X \geqslant 2)$.

## C-III Durée de vie d'une batterie

Un modèle de batterie de smartphone, dont la durée de fonctionnement $X$ suit une loi exponentielle, a une durée de vie moyenne de 3 ans.

1. Déterminer la fonction de répartition$F$ de $X$ (le temps sera exprimé en année).
2. Quelle est la probabilité qu'une batterie de ce modèle tombe en panne avant 3 ans ? Donner la valeur exacte, puis approchée à $10^{-3}$.

## C-IV

La durée de vie exprimée en heure d'un modèle d'ampoules est modélisée par une loi exponentielle de paramètres $\lambda = 0{,}0006$.
Dans cet exercice, on donnera les valeurs exactes, puis approcher à $10^{-3}$.

1. Quelle est la probabilité qu'une de ampoules ait une durée de vie inférieure à 1 000 heures ?
2. Quelle est la probabilité qu'une de ses ampoules ait une durée de vie supérieure à 2 000 heures ?
3. Quelle est la probabilité qu'une de ses ampoules ait une durée de vie supérieure à 2 000 heures, sachant qu'elle fonctionnait encore au bout de 1 000 heures ?