Correction de la feuille d'exercices sur les lois à densité

A Notion de densité

A-I

Soit k un un nombre réel.
On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \begin{cases} kx^4 \text{ si } x \in [0\,;\,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. f est une fonction de densité si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

   Une primitive de f est $F : x \mapsto k\dfrac{x^5}{5}$.
   $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{k}{5}$.
   On doit avoir $\dfrac{k}{5} = 1$ donc $k = 5$.

2.
   - $p(X \in [0\,;\,0,3]) = \displaystyle\int_0^{0,3} 5x^4\,\mathrm{d}x$
     $= F(0,3) - F(0) = 0,3^5 = \boxed{0{,}002\,43}$
     (car $F(x) = x^5$).
   - $p(X \leqslant 0,6) = F(0,6) - F(0) = 0,6^5 = \boxed{0{,}077\,76}$
   - $p(X \geqslant 0,5) = F(0,5) - F(0) = \boxed{0{,}031\,25}$
   - $p(0,8 < X < 0,9) = F(0,9) - F(0,8)$
     $= 0,9^5 - 0,8^5 = \boxed{0{,}262\,81}$

A-II

On considère la fonction définie par
$f(x) = \begin{cases} 5x^4 \text{ si } x \in [0\,;\,1] \\ 0 \text{ si } x \notin [0\,;\,1] \end{cases}$.

(a) f est une fonction densité (voir exercice précédent).

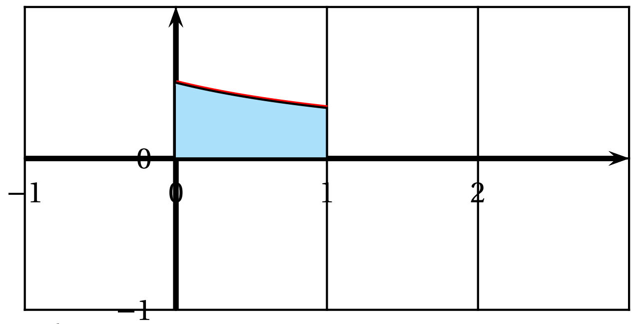
(b) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x^5$; $\boxed{F(x) = x^5}$

(c) $p(0,4 \leqslant X\,;\,0,5) = F(0,5) - F(0,4) = 0,5^5 - 0,4^5 = \boxed{0{,}031\,25}$

A-III

On considère la fonction définie par
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} \text{ si } x \in [0\,;\,1] \\ 0 \text{ si } x \notin [0\,;\,1] \end{cases}$.

(a) Courbe :



(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$; il est clair que cette aire est plus petite que l'aire du carré unité, donc cette aire est inférieure 1, donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < 1$

(c) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Une primitive de f est $F(x) = \ln(x+2)$.
Alors : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0)$
$= \ln(3) = -\ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} < 1$ car
$\dfrac{3}{2} = 1,5 < \mathrm{e}$ puisque $\mathrm{e} \approx 2,7$

B Loi uniforme

B-I

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.
Calculer :

- On sait que si X suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$, $p(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$ si $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$.
  $p(X \leqslant 0,9) = \dfrac{0,9-0}{1-0} = \boxed{0,9}$.
- $p(0,2 \leqslant X \leqslant 0,8) = \dfrac{0,8-0,2}{1-0} = \boxed{0,6}$

B-II

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.

$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ et $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

On en déduit : $\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=5\\ \dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=10\\ (b-a)^2=4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=10\\ b-a=2\end{cases}$

En ajoutant les deux lignes, il vient $2b=12$ donc $b=6$.

On en déduit $a=4$.

B-III

Une élève de terminale part toujours en avance de chez elle pour aller au lycée.

Elle prend le bus. Suivant les aléas de trafic, elle arrive entre 5 et 20 minutes avant l'ouverture du portail.

En modélise son temps d'attente devant le lycée, par une variable aléatoire, T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[5\ ;\ 20]$.

(a) la probabilité qu'elle ait plus d'un quart d'heure d'avance est :
$p(15\leqslant T\leqslant 20)=\dfrac{20-15}{20-5}=\dfrac{5}{15}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

(b) $\boxed{p(T=5)=0}$.
On rappelle que :
$p(T=\alpha)=\displaystyle\int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

(c) Son temps moyen d'attente est $E(T)\dfrac{5+20}{2}=\boxed{12{,}5\text{ min}}$.

C Loi exponentielle

C-I

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont des fonctions de densité d'une variable aléatoire qui suivent une loi exponentielle :

On rappelle que la fonction de densité d'une fonction exponentielle est définie par : f

$$(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x\geqslant 0\end{cases}.$$

a) $f(x):\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x} \text{ si } x\geqslant 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}.$
f est bien une fonction de densité d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle avec $\lambda=3$.

b) $f(x):\begin{cases}0{,}5\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} \text{ si } x\geqslant 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}.$
$\dfrac{1}{5}=0{,}2\neq 0{,}2$ donc cela ne correspond pas à une fonction de densité d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

c) $f(x):\begin{cases}\dfrac{2}{(\mathrm{e}^x)^2} \text{ si } x\geqslant 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}.$
$\dfrac{2}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}}=2\mathrm{e}^{-2x}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ avec $\lambda=2$.
f est bien une fonction de densité d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle avec $\lambda=2$.

C-II

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=3$.

(a) L'espérance est $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

(b)
- Rappels : la fonction de répartition est $F: x\mapsto 1-\mathrm{e}^{\lambda x}$ et $p(a\leqslant T\leqslant b)=F(b)-F(a)$.
  $p(X\leqslant b)=F(b)$.
- $p(X\leqslant 1)=1-F(1)=\boxed{1-\mathrm{e}^{-3}}$.
- $p(X\leqslant 2)=F(2)=1-\mathrm{e}^{-3\times 2}=\boxed{1-\mathrm{e}^{-6}}$

C-III Durée de vie d'une batterie

Un modèle de batterie de smartphone, dont la durée de fonctionnement X suit une loi exponentielle, a une durée de vie moyenne de 3 ans.

(a) $E(X)=3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda}=3 \Leftrightarrow \lambda=\boxed{\dfrac{1}{3}}$.
Cette loi exponentielle a pour paramètre $\lambda+\dfrac{1}{3}$.
La fonction de répartition et définie par : $\boxed{F(t)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}}$.

(b) La probabilité qu'une batterie de ce modèle tombe en panne avant 3 ans est $p(X\leqslant 3)=F(3)=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\times 3}=1-\mathrm{e}^{-1}=\boxed{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\approx 0,632}$.

C-IV

La durée de vie exprimée en heure d'un modèle d'ampoules est modélisée par une loi exponentielle de paramètres $\lambda=0{,}0006$.
Dans cet exercice, on donnera les valeurs exactes, puis approcher à 10^{-3}.
Notons T la durée de vie d'une ampoule.

(a) La probabilité qu'une de ampoules ait une durée de vie inférieure à 1 000 heures est :
$p(T\leqslant 1000)=F(1000)=1-\mathrm{e}^{-1000\lambda}=\boxed{1-\mathrm{e}^{-0,6}\approx 0,451\text{ h}}$

(b) La probabilité qu'une de ses ampoules ait une durée de vie supérieure à 2 000 heures est :
$p(T\geqslant 2000)$
$=1-p(T<2000)=1-F(2000)$
$=1-\left(1-\mathrm{e}^{-2000\lambda}\right)$
$=\mathrm{e}^{-2000\lambda}=\mathrm{e}^{-2000\times(-0{,}0006)}=\boxed{\mathrm{e}^{-1,2}\approx 0,301}$

(c) On utilise le caractère sans mémoire de la loi exponentielle :
$p_{T>1000}(T>2000)=p(T>2000-1000)$
$=p(T>1000)=\boxed{\mathrm{e}^{-0,6}\approx 0,549}$