Maths complémentaires : exercices sur les limites de suites

I

Calculer :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-2n)\left(n^2+3\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-2n^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2-4n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-2n^3+3n^2-5n+3\right)$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2-4n+3}{4n^2+5}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-3n+4}{n^2+1}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4-3^n\right)$

h) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\sqrt{2}^n$

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} 50\times 0,7^n$

j) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2^n}{5^n}\right)$

II

En 2015, on estime à 3 200 le nombre de tigres sauvages dans le monde.
On peut craindre que ce nombre continue dans les années à venir à diminuer de 3 % par an.
Pour tout entier naturel n, on note T_n le nombre de tigres sauvages en l'an $2015+n$ selon ce modèle.

1. Déterminer l'expression de T_{n+1} en fonction de T_n, pour tout entier naturel n.
2. Quelle est la nature de la suite (T_n) ?
   En déduire l'expression de T_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Quelle est la limite de T_n quand n tend vers $+\infty$?
4. Que peut-on en conclure ?

III

En 2018, on évalue la population d'une ville à 10 000 habitants. Chaque année, 10 % de la population quitte la ville, et 500 personnes viennent s'y installer.
On modélise la population de cette ville par une suite u définie sur $\mathbb{N}$, où u_n est égal au nombre d'habitants en $2018+n$.

1. Préciser u_0, puis calculer la population en 2019.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,9u_n + 500$.
3. Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique. Peut-on calculer facilement à la main la population en 2040 ?
4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
   $$v_n = u_n - 5\,000.$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer alors la population de la ville en 2040.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.