

Maths complémentaires Terminale : contrôle sur les suites

I (3 points)

1. Soit la suite (u_n) définie par. $u_n = n^2 - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calculer u_1 , u_2 et u_3

II (3 points)

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 7$.
Calculer u_5 .
2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.
Calculer u_5 .

III (3 points)

1. Rappeler la définition d'une suite croissante.
2. Étudier les variations des suites (u_n) suivantes :

(a) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

(b) $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$

IV (5,5 points)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans les cas suivants (en justifiant soigneusement!) :

a) $u_n = (3n+2)(-5n+1)$

b) $u_n = 2 + 3^n$

c) $u_n = 3n^2 - 5n + 1$

d) $u_n = \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 5}$

e) $u_n = \frac{3n+1}{n^2+1}$

V (5,5 points)

Au 1er janvier 2020, un arboriculteur possède 5 000 pommiers.

Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1^{er} janvier de l'année 2020 + n .

Par conséquent, on a $u_0 = 5000$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1er janvier 2022?
3. Justifier que, pour tout n , on a : $u_{n+1} = 0,96u_n + 300$.
4. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7500$, pour tout entier naturel n .

(a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .

(b) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7500 - 2500 \times 0,96^n$.

(d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(e) Que peut-on en déduire dans le contexte de l'exercice?

5. La superficie des terrains de l'arboriculteur lui permet d'avoir au maximum 6 000 pommiers.

Expliquer pourquoi cela va lui poser problème.

6. L'arboriculteur voudrait savoir en quelle année il devra acquérir un autre terrain pour pouvoir planter de nouveaux pommiers.

Peux-tu lui indiquer en quelle année il devra acquérir ce terrain?

Exercice facultatif (2 points)

Calculer, en expliquant, la somme

$$S = 23 + 26 + 29 + 32 + \dots + 128.$$