Généralités sur les suites (rappels de 1^{re})

Table des matières

I Notion de suite

Définition et notation

On appelle suite u de nombres réels toute **fonction** définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
L'image par u d'un entier naturel n est le réel $u(n)$ (notation non ctionnelle) qu'on note de manière traditionnelle u_n, et se lit « u indice n ».
On dit que u_n est le terme général de la suite u (de rang n).
Ainsi, les termes successifs, se notent-ils u_0, u_1, u_2, u_3 etc.

Exemples de suites :

- Le suite des entiers naturels 0, 1, 2, 3, etc
- la suite des entiers pairs : 0, 2, 4, 6, 8, etc.
- la suite des décimales du nombre π : 1 ; 4 ; 1 ; 5 ; 9 ; 2 etc

II Moyens de définir une suite

- **Définition explicite** : on définit directement le terme de rang n en fonction de n.
  Exemples :
  a) la suite des entiers naturels : $u(n) = n$
  b) la suite des entiers pairs : $u(n) = 2n$

- **définition au moyen d'une « relation de récurrence »**.
  On définit un terme à l'aide du terme précédent ou des termes précédents et du premier (ou de plusieurs) premier terme.

  Exemples :

  - Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    On obtient :
    $u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$
    $u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$
    $u_3 = 3u_2 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40$ etc.
    On peut calculer tous les termes, de proche en proche.
  - Suite de Fibonacci :
    Pour plus d'informations, cliquer ici Cette suite est définie par : $F_1 = F_2 = 1$ puis, pour tout $n \geqslant 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
    On a :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

La suite doit son nom à Leonardo Fibonacci (ou Léonard de Pise) qui, dans un problème récréatif posé dans l'ouvrage Liber abaci publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins : « Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance. ».
Dans cette population idéale, on suppose que :

— au début du premier mois, il n'y a qu'une paire de lapereaux;
— les lapins ne peuvent procréer qu'à partir de l'âge de deux mois;
— chaque début de mois, toute paire susceptible de procréer engendre exactement une nouvelle paire de lapereaux;
— les lapins ne meurent jamais (la suite de Fibonacci est donc croissante (et tend vers l'infini)

Ce modèle d'évolution est donc irréaliste, mais c'est le premier connu.

III Variations

Propriété

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite u est croissante sur $\mathbb{N}$.
Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite u est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exemples :

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$ donc la suite est décroissante.
2. $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + n^2$.
   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = n^2 \geqslant 0$ donc la suite est croissante.

IV Suites arithmétiques

IV.1 Définition

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Par conséquent : $u_{n+1} - u_n = r$; la différence entre deux termes consécutifs est constante.
r est appelé **raison** de la suite.

Exemples :

- la suite des entiers naturels
- la suite des entiers pairs (ou impairs)
- la hauteur dont on s'élève en grimpant un escalier

Remarque : le terme « arithmétique » vient de ce que chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et de celui qui le suit : $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.

IV.2 Écriture explicite des termes

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on : $u_n = u_0 + nr$.
Plus généralement : pour tout p, $u_n = u_p + (n-p)r$

Démonstration (pas très rigoureuse, tant que l'on n'a pas vu les démonstrations par récurrence) On a successivement :

$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$
$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$
$\dots$
$u_{n-1} = u_0 + (n-1)r$
$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$

Sinon, $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$; par soustraction, on a : $u_n - u_p = (n-p)r$ donc $u_n = u_p + (n-p)r$.

IV.3 Variations

Théorème :

Soit (u_n) un suite arithmétique de raison r.

- Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.
- Si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration :
$u_{n+1} - u_n = r$ d'où le résultat.

V Suites géométriques

V.1 Définition

Définition

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$.
q est appelé **raison** de la suite.

Exemples :

- la suite des puissances de 2 : $2^0,\ 2^1, \cdots, 2^n \cdots$ est une suite géométrique de raison $q = 2$
- la population d'une ville augmente chaque année de 1,5 %; elle est donc multipliée chaque année par le nombre (coefficient multiplicateur) $\left(1 + \dfrac{1,5}{100}\right) = 1,015$. on obtient une suite géométrique de raison $q = 1,015$.
- Le livret A (livret de Caisse d'épargne) a un taux d'intérêts composés de 3 % .
  Chaque année, le capital de l'année précédente produit des intérêts égaux à 3 % du capital et viennent **s'ajouter** à ce capital pour former le nouveau capital.
  On note C_0 l capital initial et C_n le capital acquis au bout de n années.
  - On a donc $C_1 = C_0 + \dfrac{3}{100} \times C_0 = C_0 \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = 1,03C_0$
  - De. Même, pour tout n, $C_{n+1} = 1,03C_n$.
    La suite (C_n) est géométrique de raison $\boxed{q = 1,03}$.
  - Le terme général est alors : $C_n = C_0q^n$.
  - Imaginons que Jules ait ouvert un Livret A et placé 1 000 € sur son livret.
    On aura : $C_n = 1\,000 \times 1,03^n$.
    Au bout de 10 ans, son capital sera $C_{10} = 1\,000 \times 1,03^{10} \approx \boxed{1343,92\text{ €}}$.
    Au bout de 23 ans, $C_{23} \approx \boxed{1\,973,59\text{ €}}$
    Au bout de 24 ans, $C_{24} \approx \boxed{2\,032,79\text{ €}}$.
    Il faut attendre 24 ans pour que le capital double (hors inflation !).

Remarque : le terme « géométique » vient de ce que chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et de celui qui le suit : $u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$.

V.2 Écriture explicite des termes

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on : $u_n = u_0q^n$.
Plus généralement : pour tout p, $u_n = u_pq^{n-p}$

Justification On a successivement :
$u_1 = q u_0$
$u_2 = u_1 \times q = \left(u_0 \times q\right) \times q = u_0 q^2$
$u_3 = u_2 \times q = \left(u_0 \times q^2\right) = u_0 \times q^3$
$\ldots$
$u_{n-1} = u_0 \times q^{n-1}$
$u_n = u_{n-1} \times q = \left(u_0 \times q^{n-1}\right) \times q = u_0 \times q^n$

Sinon, $u_n = u_0 q^n = u_0 q^p \times q^{n-p} = u_p q^{n-p}$.

V.3 Variations

Théorème :

Soit (u_n) un suite géométrique de raison q.

- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.
- Si $q > 1$, la suite (u_n) est croissante si $u_0 > 0$ et décroissante si $u_0 < 0$.
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est décroissante si $u_0 > 0$ et croissante si $u_0 < 0$.

Démonstration :
$u_{n+1} - u_n = u_0 q^n - u_0 q^{n-1} = u_0 q^{n-1}(q-1)$ qui est du signe de $u_0(q-1)$ d'où le résultat.

VI Suites arithmético-géométriques

Définition

Soient a et b deux réels.
Une suite arithmético-géométrique est une suite u définie par la donnée de son premier terme (généralement u_0 ou parfois u_1) et par une relation de récurrence de la forme : $u_{n+1} = a \times u_n + b$

Remarques :

- Si $a = 1$, alors la suite u est une suite arithmétique de raison b.
- Si $a = 0$, alors la suite u est une suite constante où tous les termes valent b.
- Si $b = 0$, alors la suite u est une suite géométrique de raison a.

Exemple d'étude :

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 2$.
On définit une suite auxiliaire v par : $v_n = u_n - 4$ pour tout n.

a) Montrer que v est géométrique. On en précisera la raison.
b) Exprimer le terme v_n en fonction de n.
c) En déduire alors l'expression de u_n en fonction de n.

Réponses :

1. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \left(\frac{1}{2}u_n + 2\right) - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$.

   Pour tout n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$; v est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

2. On en déduit : $v_n = v_0 q^n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ car $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$.

3. Alors : $u_n = v_n + 4 = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 = \boxed{4 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

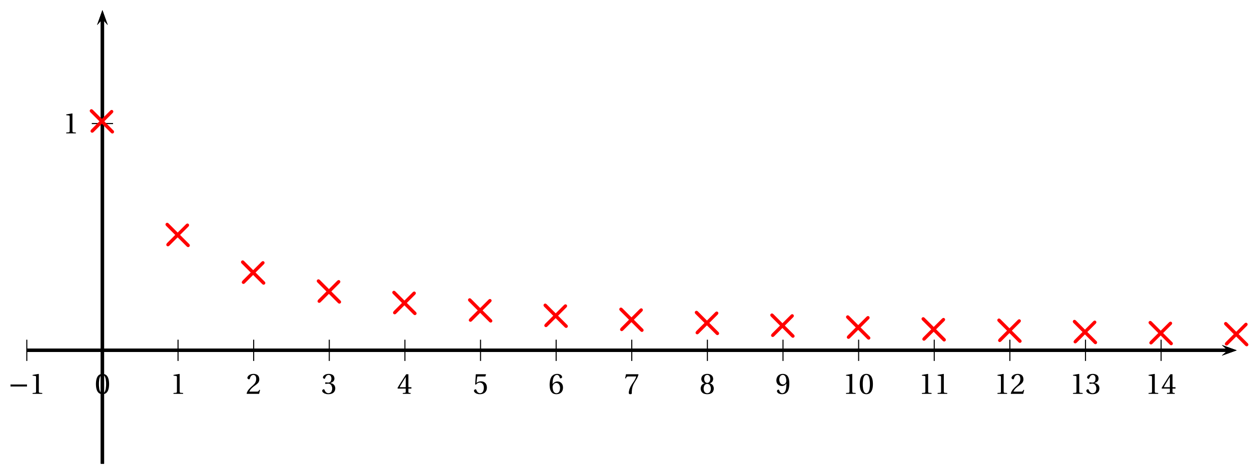
VII Notion limite d'une suite

VII.1 Notion intuitive de limite

On s'intéresse au comportement des termes de la suite quand les valeurs de n, prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut, c'est-à-dire, tendent vers $+\infty$.

A) **Limite finie** :

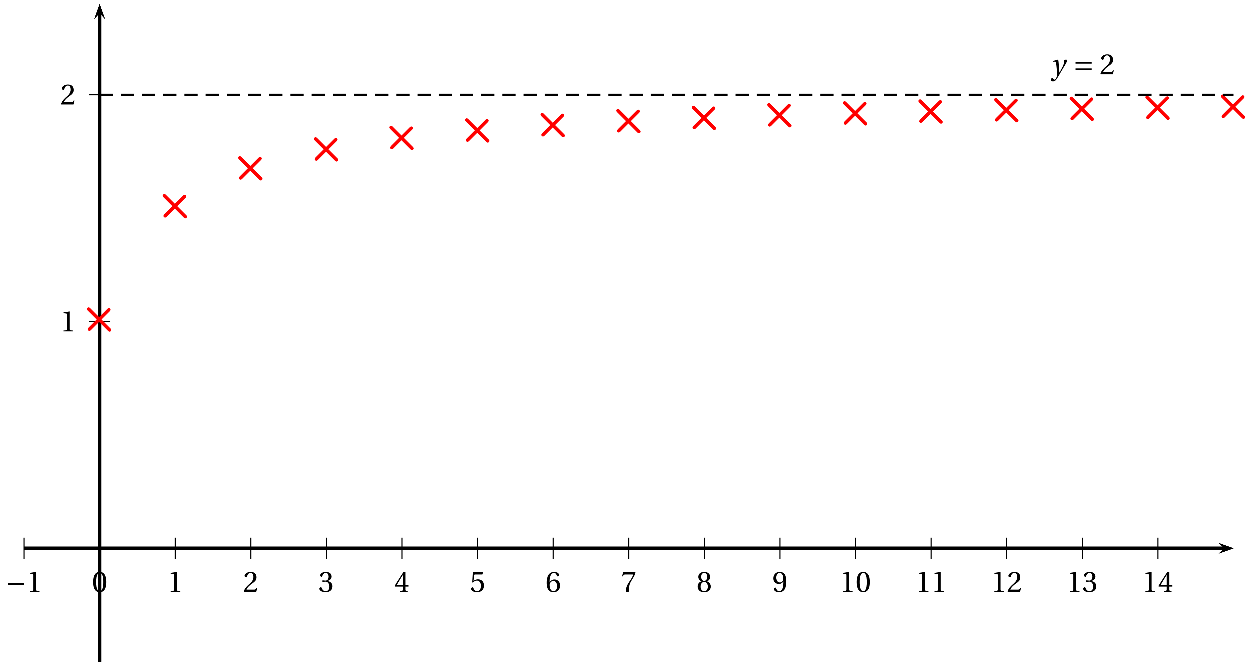
Exemple graphique 1



Graphiquement, les termes de la suite (ordonnées des points) semblent se rapprocher de plus en plus de 0.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$; on dit que la suite (u_n) converge vers 0 ou que le terme u_n tend vers 0.

Exemple graphique 2



Graphiquement, les termes de la suite (ordonnées des points) semblent se rapprocher de plus en plus de 2.

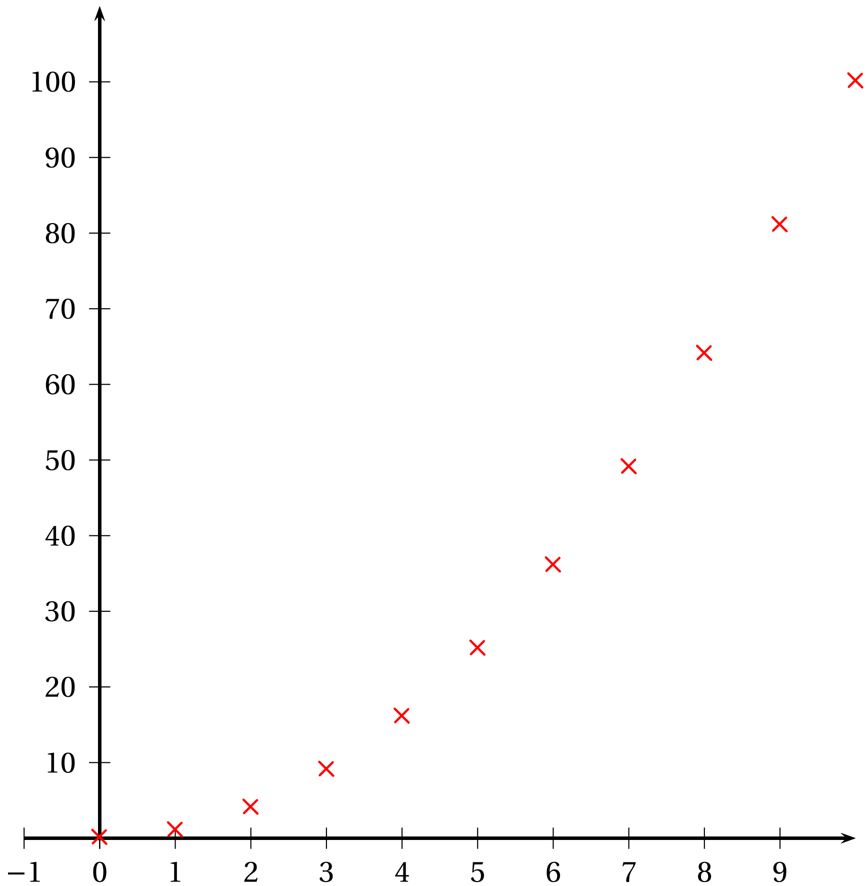
On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 20$; on dit que la suite (u_n) converge vers 2 ou que le terme u_n tend vers 2.

Propriété (admise)

Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, …, $\dfrac{1}{n^k}$ où k est un entier naturel et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

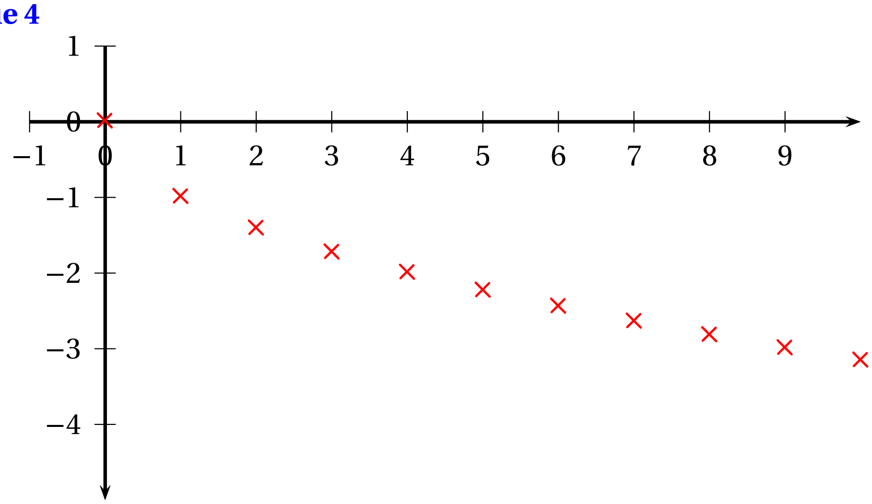
B) **Limite infinie** :

Exemple graphique 3



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple graphique 4



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut en valeur absolue, en étant négatifs.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété

Les suites de terme général n, n^2, n^k ($k$entier naturel non nul) et $\sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

⚠**Remarque :** il existe des suites qui n'ont pas de limite : exemple : $u_n = (-1)^n$ qui alterne entre -1et 1

Remarques : on peut conjecturer des limites de fonctions par un graphique (en représentant les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$), en regardant les résultats d'un tableur (ou calculatrice) ou en appliquant des règles de calculs sur les limites.

- Graphiquement : voir précédemment.
- Tableur : considérons la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 5$.
  Dans un tableur, on obtient :

1	n	u_n
2	0	3
3	1	« $=0.8*B2+5$ »
4	2	$10,92$
⋮	⋮	⋮
57	55	$24,9998971$
58	56	$24,9999177$
59	57	$24,9999342$
60	58	$24,9999473$
51	59	$24,9999579$

On conjecture que la suite tend vers 25 quand n tend vers $+\infty$.

VII.2 Opérations et limites

a) Addition ou soustraction

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors (u_n+v_n) a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

« Forme indéterminée » signifie que l'on ne peut pas trouver la liste directement ; il faut « travailler » davantage ...

a) **Produit**

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$\ell\ell'$	∞	∞	**Forme indéterminée**

Pour trouver le signe de la limite d'un produit, on utilise la règle du signe d'un produit.

a) **Quotient**

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	**Forme indéterminée**	**Forme indéterminée**

Remarque : il y a quatre formes indéterminées qui sont :

« $\infty - \infty$ »	« $0 \times \infty$ »	« $\dfrac{0}{0}$ «	$\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Remarque : si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, il faut que v_n soit de signe constant à partir d'un certain rang pour pouvoir conclure en appliquant la règle des signes.
Sinon, le quotient n'a pas de limite.

Exemples d'application

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - 2\right)$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ donc, par différence, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - 2\right) = -2}$

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2+1}$.

   On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+1\right) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2+1} = 0}$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)(2-n)$.

   On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (2-n) = +\infty$, donc par produit et en utilisant la règle des signes :
   $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)(2-n) = -\infty}$

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - 2\right)\left(1-n^2\right)$.

   On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - 2\right) = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-n^2\right) = -\infty$, donc par produit et en utilisant la règle des signes :
   $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - 2\right)\left(1-n^2\right) = +\infty}$

Que faire quand on a une forme indéterminée ?

- Exemple d'un polynôme : déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(5n^2 - 2n + 3\right)$.
  L'astuce, qui convient pour tous les polynômes est de factoriser par te ter me plus grand exposant :
  $5n^2 - 2n + 3 = n^2\left(5 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)$.
  On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(5 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right) = 5$, donc, par produit : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(5n^2 - 2n + 3\right) = +\infty}$
- Exemple d'une fraction rationnelle (quotient de deux polunômes)
  Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+2}{n^2+1}$.
  On applique la méthode vue pour les polynômes au numérateur et au dénominateur
  a) $n + 2 = n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$
  b) $n^2 + 1 = n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$
  c) Alors : $\dfrac{n+2}{n^2+1} = \dfrac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ en simplifiant.
  d) Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\right) = +\infty$.
  e) Conclusion : par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+2}{n^2+1} = 0}$

VII.3 Limites et comparaisons

a) Limite infinie

Propriété admise

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

b) Limite finie

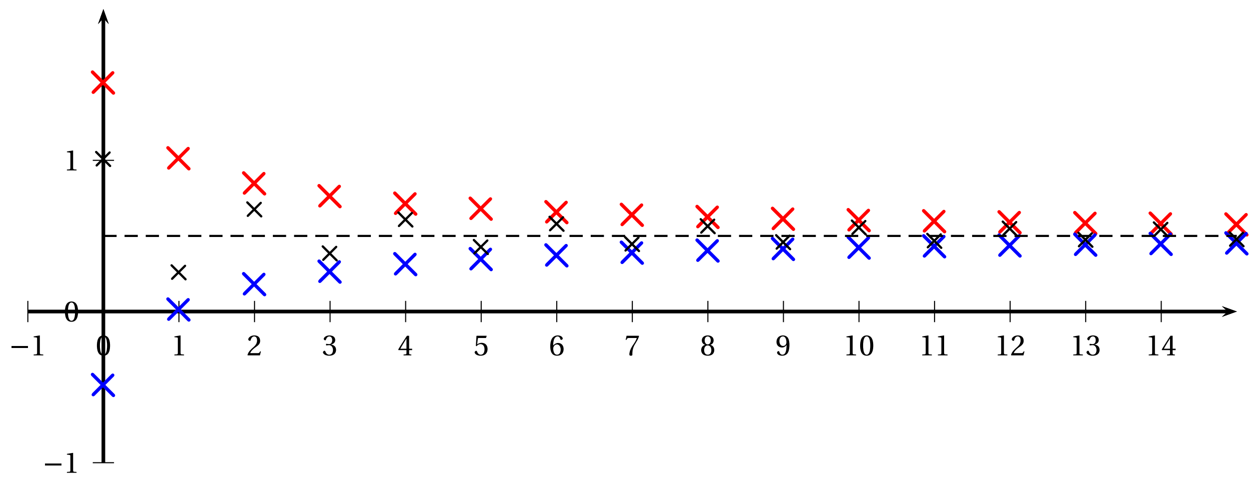
Propriété

Soient deux suites (u_n) et (v_n) tqui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.
On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
Alors : $\ell \leqslant \ell'$

Théorème des gendarmes

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ et s'il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Illustration graphique



Les points correspondant à u_n sont bleu, à w_n en rouge et à u_n en noir, avec une limite égale à 0,5.

Exemples

1. Étudions la limite de la suite (u_n) avec $u_n = n^2 + \sqrt{n+1}$.
   Pour tout n, $\sqrt{n+1}$ existe et $u_n > n^2$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$
2. Étudions la limite de la suite (u_n) avec $u_n = -n - \dfrac{1}{n+1}$.
   Pour tout n, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $u_n < -n$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.
3. Étudions la limite de la suite (u_n) avec $u_n = n^2 + (-1)^n$.
   Pour tout n, $(-1)^n \geqslant -1$ donc $u_n \geqslant n^2 - 1$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 - 1\right) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$
4. Étudions la limite de la suite (u_n) avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+5}$.
   On a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ pour tout n donc :
   $-\dfrac{1}{n+5} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+5}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{n+5}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n+5}\right) = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.