Correction des exercices sur les suites (1)

A Généralités

A-I

Soit u la suite définie par $u_n = n^2 + 1$.

- $u_0 = 0^2 + 1 = \boxed{1}$
- $u_1 = 1^2 + 1 = \boxed{2}$
- $u_2 = 2^2 + 1 = \boxed{5}$

A-II

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.

- $u_1 = u_0 + 2 = \boxed{2}$
- $u_2 = u_1 + 2 = \boxed{4}$
- $u_3 = u_2 + 2 = \boxed{6}$

A-III

u est la suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout n. $u_1 = \boxed{-1}$; $u_2 = \boxed{1}$; $u_3 = \boxed{-1}$; $u_4 = \boxed{1}$.
On constate que les termes valent alternativement 1 ou -1.

A-IV

u est la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -2u_n + 1$ pour tout n.

- $u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times 5 + 1 = -10 + 1 = \boxed{-9}$
- $u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times (-9) + 1 = 18 + 1 = \boxed{19}$
- $u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times 19 + 1 = -38 + 1 = \boxed{-37}$

B Suites arithmétiques

B-I

Dans cet exercice, les suites sont toutes arithmétiques.

1. 1) On a $u_0 = 4$ et $r = 2$.On sait que, pour tout n, $u_n = u_0 + nr$ donc $u_{35} = u_0 + 35r = 4 + 35 \times 2 = \boxed{74}$.
2. On a $u_1 = 3$ et $r = -2$. De même, $u_n = u_p + (n-p)r$ donc $u_{17} = u_1 + 16r = 3 + 16 \times (-2) = 3 - 32 = \boxed{-29}$.
3. On a $u_2 = 3$ et $u_{14} = 9$. $u_{14} = u_2 + 12r$ donc $r = \dfrac{u_{14} - u_2}{12} = \dfrac{6}{12} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$
4. On a $u_4 = 1$ et $u_9 = 4$.

- Calculons d'abord r : $r = \dfrac{u_9 - u_4}{5} = \dfrac{3}{5}$ (en calquant sur le calcul précédent).
- Alors : $u_{21} = u_9 + (21-9)r = 4 + 12 \times \dfrac{3}{5} = 4 + \dfrac{36}{5} = \boxed{\dfrac{56}{5}}$

5. On a $u_{100} = 650$ et $r = 8$. $u_{100} = u_0 + 100r$ donc $u_0 = u_{100} - 100r = \boxed{-150}$

B-II

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ telle que
$u_1 = -1$.

1. $u_{100} = u_1 + 99r = -1 + 99 \times \dfrac{1}{2} = -1 + \dfrac{00}{2} = \boxed{\dfrac{97}{2}}$.
2. $u_n = u_1 + (n_1)r = -1 + \dfrac{n_1}{2}$.
   $u_n \geqslant 50 \Leftrightarrow -1 + \dfrac{n-1}{2} \geqslant 50 \Leftrightarrow \dfrac{n-1}{2} \geqslant 51 \Leftrightarrow n - 1 \geqslant 102 \Leftrightarrow \boxed{n \geqslant 103}$.
   On en déduit $\boxed{N = 103}$.

C Suites géométriques

C-I

Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui, préciser leur premier terme et leur raison.

a) $u_n = 2^n$; pour tout n, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2u_n$ donc la suite (u_n) est **géométrique** de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

b) $u_n = -4n$: $u_{n+1} = -4(n+1) = -4n - 4 = u_n - 4 = u_n - 4$ donc $(_n)$ est **arithmétique**, **pas géométrique**

c) $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.
Pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+2}}{3^n + 1} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2^n + 1}{3^n} = \dfrac{2}{3} u_n$ donc $(_n)$ est **géométrique** de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

C-II

Dans cet exercice, toutes les suites sont géométriques.

1. On a $u_0 = 8$ et $q = \dfrac{1}{2}$. Déterminer u_7.
   $u_7 = u_0 q^7 = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 = \dfrac{8}{128} = \boxed{\dfrac{1}{16}}$.
2. On a $u_1 = 243$ et $q = \dfrac{1}{3}$. Déterminer u_9.
   $u_n = u_p q^n - p$ donc $u_9 = u_1 q^8 = 243 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^8 = 3^5 \times \dfrac{1}{3^8} = \dfrac{1}{3^3} = \boxed{\dfrac{1}{27}}$.
3. On a $u_1 = 12$ et $u_5 = 3\,072$. $u_5 = u_1 q^4$ donc $q^4 = \dfrac{u_5}{u_1} = \dfrac{3072}{122} = 256$.
   On en déduit $q^2 = \sqrt{256} = 16$ car $q^2 \geqslant 0$ d'où $\boxed{q = -4 \text{ ou } q = 4}$.

C-III

Un capital est placé à intérêts simples de 1 % par an.
On note S_n le capital à la n-ième année.
Les intérêts sont fixes et valent $S_0 \times 1\,\% = 0,01S_0$.
Chaque année, on ajoute la même somme, donc n a une suite arithmétique.

C-IV

Un capital est placé à intérêts composés de 3 % par an.
On note S_n le capital à la n-ième année.

1. On a $S_1 = S_0 + 3\,\% S_0 = \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) S_0 = \boxed{1,03S_0}$.
   De même, pour tout n, $S_{n+1} = 1,03S_n$ donc (S_n) est une suite géométrique, de raison $\boxed{q = 1,03}$.
2. Un exemple d'un tel placement este livret A (de caisse d'épargne)
3. Éric ouvre un livret de caisse d'épargne et place 1 000 €.
   On note C_0 le capital initial, donc $C_0 = 1\,000$.
4.
   - Le capital au bout d'un an est $C_1 = 1,03C_0 = 1,03 \times 1\,000 = 1030$.
   - La capital au bout de deux ans est $C_2 = 1,032C_0 = 1,03^2 \times 1\,000 = 1\,060{,}90$.
   - Au bout de10 ans : $C_{10} \approx 1\,343{,}92\ e$.
5. Il faut attendre 24 ans our voir le capital doubler.
   $C_{23} \approx 1\,973{,}59 < 2\,000$ $C_{24} \approx 2\,032{,}79 > 2\,000$
6. Actuellement le taux d'inflation est d'environ 5,6 % (moyenne annuelle), ce qui signifie que les prix augmenteraient de 5,6 % en un an.
   La rémunération du livret de caisse d'épargne a un taux inférieur à celui de l'inflation, donc on perd de l'argent, mais moins qu'en ne plaçant pas