Correction des exercices sur la somme des termes d'une suite

I

D'abord, on identifie une suite géométrique puisque l'augmentation est stable en pourcentage. La raison est le coefficient multiplicateur, soit $q = 1 + \dfrac{10}{100} = 1,1$.

1. Nous connaissons la production de 2020 et nous cherchons celle qui existe deux ans plus tard.
   Nommons cette suite (u_n) et appelons u_0 la production en 2020.
   Nous cherchons u_2.
   $u_2 = u_0 \times q^2 = 200 \times 1,1^2 = 242$.
   Selon ce modèle, l'organisme produit 242 tonnes de paperasse en 2022.
2. La deuxième question consiste à chercher une production totale sur plusieurs années. Nous avons donc recours à la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. Notons S_n la somme des termes de u_0 jusqu'à u_n.
   Ici, $n = 11$.
   $S_{11} = 200 \times \dfrac{1 - 1,1^{11}}{1 - 1,1} \approx 3\,706$.
   En onze ans, l'organisme produit 3 706 tonnes de paperasse.

II Amérique du Sud bac ES novembre 2014

Une agence de presse a la charge de la publication d'un journal hebdomadaire traitant des informations d'une communauté de communes dans le but de mieux faire connaître les différents évènements qui s'y déroulent.

Un sondage prévoit un accueil favorable de ce journal dans la population.
Une étude de marché estime à 1 200 le nombre de journaux vendus lors du lancement du journal avec une progression des ventes de 2 % chaque semaine pour les éditions suivantes.
L'agence souhaite dépasser les 4 000 journaux vendus par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus n semaines après le début de l'opération. On a donc $u_0 = 1\,200$.

1. 2 % de 1 200 correspondent à $\dfrac{2}{100} \times 1\,200 = 24$; donc $u_1 = 1\,200 + 24 = 1\,224$.
2. Ajouter 2 % c'est multiplier par 1,02 ; donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $u_0 = 1\,200$.
   Donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 1\,200 \times 1,02^n$.
3. Le nombre de journaux vendus sera supérieur à 1 500 quand $u_n > 1\,500$; on résout l'inéquation :
   À la calculatrice, on trouve $n \geqslant 12$ donc c'est à partir de 12 semaines que le nombre de journaux vendus sera supérieur à 1 500.
4. Voici un algorithme :

VARIABLES :	U est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	U prend la valeur 1 200
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $U < 4000$
	N prend la valeur $N+1$
	U prend la valeur $1,02 \times U$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

(a) La valeur de N affichée par cet algorithme est la première valeur pour laquelle U est supérieur ou égal à 4 000.

Dans cet algorithme, U correspond au nombre de journaux vendus la semaine N, autrement dit correspond à u_N.

La valeur de N affichée par l'algorithme est 61.

(b) C'est à partir de la semaine 61 que le nombre de journaux vendus par semaine sera supérieur à 4 000.

On peut vérifier que $u_{60} \approx 3937 < 4000$ *et que* $u_{61} \approx 4015 > 4000$.

5. (a) D'après le cours, pour tout réel $q \neq 1 : 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Donc :

$$1 + 1,02 + \cdots + 1,02^n = \frac{1-1,02^{n+1}}{1-1,02} = \frac{1,02^{n+1}-1}{0,02} = \frac{1}{0,02} \times \left(1,02^{n+1}-1\right) = 50 \times \left(1,02^{n+1}-1\right)$$

(b) On pose, pour tout entier n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Donc :

$$S_n = 1200 + 1200 \times 1,02 + \cdots + 1200 \times 1,02^n = 1200\left(1 + 1,02 + 1,02^2 + \cdots + 1,02^n\right)$$
$$= 1200 \times 50 \times \left(1,02^{n+1}-1\right) = 60000\left(1,02^{n+1}-1\right)$$

(c) Le nombre total de journaux vendus au bout de 52 semaines est S_{52} c'est-à-dire $60000 \times \left(1,02^{53}-1\right) \approx 111380$.