Maths complémentaires : correction des exercices sur les limites de suites

I

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2n)=-\infty$ et $\left(n^2+3\right)=+\infty$ donc, par produit :

$$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2n)\left(n^2+3\right)=-\infty}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$. D'où :

$$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2=4}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-2n^2\right)=-\infty$ donc :

$$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1-2n^2}\right)=0}$$

c) Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2n^3+3n^2-5n+3\right)$, on a une forme indéterminée.

$(-2n^3+3n^2-5n+3=n^3\left(-2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}n^3=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}\right)=-2$.

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2n^3+3n^2-5n+3\right)=-\infty}$

d) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2-4n+3}{4n^2+5}\right)$.

On a une forme indéterminée.

$$\dfrac{n^2-4n+3}{4n^2+5}=\dfrac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(4+\frac{5}{n^2}\right)}=\dfrac{1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}}.$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)=1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\dfrac{5}{n^2}\right)=4$

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2-4n+3}{4n^2+5}\right)=\dfrac{1}{4}}$.

e) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-3n+4}{n^2+1}\right)$: on a une forme indéterminée.

$\dfrac{-3n+4}{n^2+1}=\dfrac{n\left(-3+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{-3+\frac{4}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ après simplification par n.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=1$

Par produit et quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-3n+4}{n^2+1}\right)=0}$

f) $3>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-3^n\right)=-\infty}$

g) $\sqrt{2}>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2}^n=+\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}5\sqrt{2}^n=+\infty}$.

h) $0<0,7<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0,7^n=0$ donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}50\times0,7^n=0}$.

i) On a une forme indéterminée, mais on remarque que $\left(\dfrac{2^n}{5^n}\right)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

$0<\dfrac{2}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$.

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n}{5^n}\right)=0}$.

II

En 2015, on estime à 3 200 le nombre de tigres sauvages dans le monde.
On peut craindre que ce nombre continue dans les années à venir à diminuer de 3 % par an.
Pour tout entier naturel n, on note T_n le nombre de tigres sauvages en l'an $2015+n$ selon ce modèle.

1. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 3 % est $1-\dfrac{3}{100}=0,97$.

   Pour tout n, $\boxed{T_{n+1}=0,97T_n}$.
2. La suite (T_n) est géométrique de raison $\boxed{q=0,97}$ et de premier terme $T_0=3\,200$.

   On en déduit que, pour tout n, $\boxed{T_n=T_0q^n=1\,200\times0,97^n}$.
3. $0<0,07<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0,97^n=0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=0}$.
4. On en conclut que le nombre de tigres va tendre vers 0, donc si ce modèle perdure, l'espèce va disparaître.

III

En 2018, on évalue la population d'une ville à 10 000 habitants. Chaque année, 10 % de la population quitte la ville, et 500 personnes viennent s'y installer.
On modélise la population de cette ville par une suite u définie sur $\mathbb{N}$, où u_n est égal au nombre d'habitants en $2018+n$.

1. $u_0 = 10000$.
   Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 10 % est 0,9 car $-10\,\% = 1-\dfrac{10}{100} = 0,9$.
   $\boxed{u_1 = 0,9u_0 + 500}$.
2. De même, pour tout n, $\boxed{u_{n+1} = 0,9u_n + 500}$.
3. - $\boxed{u_0 = 10000}$; $u_1 = 9500$ et $\boxed{u_2 = 9050}$.
     $\boxed{u_1 - u_0 = -500}$ et $\boxed{u_2 - u_1 = -450}$.
     La différence de deux termes consécutifs n'est pas constante : la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   - $\dfrac{u_1}{u_0} = 0,95$ et $\dfrac{u_2}{u_1} \approx 0,953$.
     Les quotients de termes consécutifs ne sont pas égaux : a suite (u_n) n'est pas géométrique.
   - Il est donc difficile de calculer la population en 2040, c'est-à-dire u_{22}.
4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 5000$.
   (a) Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 5000$
   $= 0,9u_n + 500 - 5000$
   $= 0,9u_n - 4500$
   $= 0,9(u_n - 500)$
   $= 0,9v_n$.
   Par conséquent, pour tout n : $\boxed{v_{n+1} = 0,9v_n}$.
   (v_n) est géométrique, de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5000 = 5000$.

   (b) - Alors, pour tout n : $v_n = v_0 q^n = \boxed{5000 \times 0,9^n}$.
   - On en déduit : $n = v_n + 5000 = 5000 + 5000 \times 0,9^n = \boxed{5000\left(1+0,9^n\right)}$

   (c) La population en 2040 est $u_{22} = 5000 \times \left(1+0,9^{22}\right) \approx 5492$.
5. $0 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5000}$.
   Si le modèle perdure, la population va tendre vers 5 000 habitants.