Maths complémentaires : correction du contrôle sur les suites

I (3 points)

1. Soit la suite (u_n) définie par. $u_n = n^2 - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   - $u_0 = 0^2 - 3 = \boxed{-3}$
   - $u_1 = 1^2 - 3 = \boxed{-2}$
   - $u_2 = 2^2 - 3 = \boxed{1}$

2. Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

   - $u_1 = 3u_0 - 4 = 3 \times 2 - 5 = \boxed{1}$
   - $u_2 = 3u_1 - 4 = 3 \times 1 - 5 = \boxed{-2}$
   - $u_3 = 3u_1 - 4 = 3 \times (-2) - 5 = \boxed{-11}$

II (3 points)

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 7$.
   On sait que $u_n = u_0 + nr$ donc $u_5 = u_0 + 5r = -2 + 5 \times 7 = 33$; $\boxed{u_5 = 33}$.
2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.
   $u_n = u_0 q^n$ donc $u_5 = 3 \times 2^5 = \boxed{96}$.

III (3 points)

1. Une suite (u_n) est croissante si, et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
2. Étudier les variations des suites (u_n) suivantes :
   (a) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$
   $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+3}$.
   Alors : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{n^2 + 4n + 4 - \left[n^2 + 3n + n + 3\right]}{(n+1)(n+3)}$
   $= \dfrac{1}{(n+1)(n+3)} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
   (b) $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$

   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = n^2 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

IV (5,5 points)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans les cas suivants :

a) $u_n = (3n+2)(-5n+1)$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n+2) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5n+1) = -\infty$

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

b) $u_n = 2+3^n$

$3>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

c) $u_n = 3n^2-5n+1$

On a une forme indéterminée.

$n^2-5n+1 = n^2\left(3-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 3$.

D'où, par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

d) $u_n = \dfrac{2n^2-n+3}{3n^2+5}$.

On a une forme indéterminée ;

$\dfrac{2n^2-n+3}{3n^2+5} = \dfrac{\cancel{n^2}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right) = 2$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{5}{n^2}\right) = 3$

Alors, par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}}$

e) $u_n = \dfrac{3n+1}{n^2+1}$.

On a une forme indéterminée.

$\dfrac{3n+1}{n^2+1} = \dfrac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ après simplification par n.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right) = 3$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$

Par produit est quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

V (5,5 points)

Au 1er janvier 2020, un arboriculteur possède 5 000 pommiers.
Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1er janvier de l'année $2020 + n$.
Par conséquent, on a $u_0 = 5\,000$

1. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 4 % est 0,96.
   - $u_1 = 0,96u_0 + 300 = 0,96 * 5\,000 + 300 = \boxed{5\,100}$
   - $u_2 = 0,96u_1 + 300 = 0,96 * 5\,100 + 300 = \boxed{5\,196}$
2. Le 1er janvier 2022, l'arboriculteur possédera 5 196 pommiers.
3. Plus généralement : $\boxed{u_{n+1} = 0,96u_n + 300}$.
4. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7500$, pour tout entier naturel n.

   (a) Pour tout n :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 7\,500$
   $= (0,96u_n + 300) - 7\,500$
   $= 0,95u_n - 7200$
   $= 0,96\,(u_n - 7\,500)$
   $= 0,96v_n$.
   $\boxed{v_{n+1} = 0,96n}$.
   On en déduit que la suite (v_n) est géométrique, de raison $q = 0,96$ et de premier terme
   $v_0 = u_0 - 7500 = -2\,500$

   (b) Puisque (v_n) est géométrique de raison. $q = 0,96$: $v_n = v_0q^n = \boxed{-2\,500 \times 0,96^n}$.

   (c) $v_n = u_n - 7\,500$ donc $u_n = 7\,500 + v_n$ d'où : $\boxed{u_n = 7500 - 2500 \times 0,96^n}$.

   (d) $-1 < 0,96 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,96^n = 0$.
   Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7500}$.

   (e) Cela signifie que le nombre d'arbres de l'arboriculteur se stabilise autour de 7 500 pommiers.

5. La superficie des terrains de l'arboriculteur lui permet d'avoir au maximum 6 000 pommiers.
   Puisque le nombre de pommiers va tendre vers 7 500, il va finir par dépasser 6 000, ce qui est trop pour la superficie des terrains.
6. On cherche la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n > 6\,000$.
   À la calculatrice, on trouve $\boxed{u_{12} \approx 5968,23}$ et $\boxed{u_{13} \approx 6029,50}$.
   Il faudra qu'il achète un nouveau terrain au bout de 13 ans, donc en 2033.

VI Exercice facultatif

Calculer la somme $S = 23 + 26 + 29 + 32 + \cdots + 128$.
' On a la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 3$.
$u_0 = 23$; $u_n = u_0 + nr = 23 + 3n$ donc $23 + 3n = 128$ qui donne $n = 35$.
Alors : $S = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$ avec $n = 35$ donc $S = 36 \times \dfrac{23 + 128}{2} = \boxed{2\,718}$