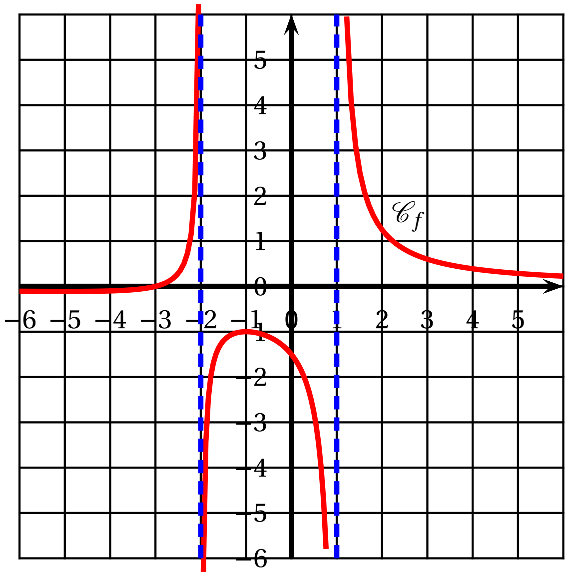
Maths complémentaires : corrigé du contrôle (limites, nombre dérivé)

Exercice I (3 points)

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\}$.



Graphiquement, on trouve :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptotes l'axe des abscisses en $-\infty$ et $+\infty$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation 1.

Exercice II (4 points)

Calculer les limites suivantes :

a) $\dfrac{5x^2 - 2x - 5}{x^2 + 1} = \dfrac{\cancel{x^2}\left(5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(5 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 5$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$.

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5x^2 - 2x - 5}{x^2 + 1}\right) = 5}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \left(x^2 + x - 1\right) = \boxed{11}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} (x - 3) = \boxed{0}$ avec $\boxed{x - 3 < 0}$.

Donc : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x - 3}\right) = -\infty}$

c)
- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} (3x + 4) = \boxed{-5}$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} (x + 3) = \boxed{0}$ avec $\boxed{x + 3 < 0}$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} (x - 2) = \boxed{-5}$.
- On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} [(x + 3)(x - 2)] = \boxed{0}$ en étant positif
- Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \left(\dfrac{3x + 4}{(x + 3)(x - 2)}\right) = -\infty}$

Exercice III (3 points)

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f continue :

x	$-\infty$		-3		-2		1		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$

Sur $]-\infty\,;\,-2]$, g est continue, les valeurs passent de $+\infty$ à -4, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution; celle-ci est unique car la fonction est décroissante.
La solution est même dans l'intervalle [-3; -2].
Sur $[-2\,;\,+\infty[$, le maximum de g donc l'équation $g(x)=0$ n'admet aucune solution.

Exercice IV (3 points)

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
On sait que $f(2)=-1$ et $f'(2)=3$.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
$y=f'(2)(x-2)+f(2) \Leftrightarrow y=3(x-2)-1 \Leftrightarrow \boxed{y=3x-7}$.

Exercice V (3,5 points)

Soit la fonction g définie par$g(x)=x^3-3x-4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. $g(x)=x^3-3x-4=x^3\left(1-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)$.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)=1.$
   - Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$
2. De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)=1.$
   D'où Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty}$
3. On donne ci-dessous le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

4. $\boxed{g(-1)=-2}$ et $\boxed{g(1)=-6}$
5. Sur l'intervalle $[-\infty\,;\,1]$, le maximum de g est -2, donc l'équation $g(x)=0$ n'admet aucune solution.
   Sur $[1\,;\,+\infty[$:
   - g est continue.
   - $g(1)=-6<0$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ donc $g(x)$ prend des valeurs supérieures strictement positives

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation. $g(x)=0$ admet (au moins) une solution.
   Comme g est croissante sur cet intervalle, cette solution est unique; on la nomme α.
6. À la calculatrice, on trouve $\boxed{2,19<\alpha<2,20}$
7. **(question facultative)**
   Tableau de signes :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice VI (1,5 point)

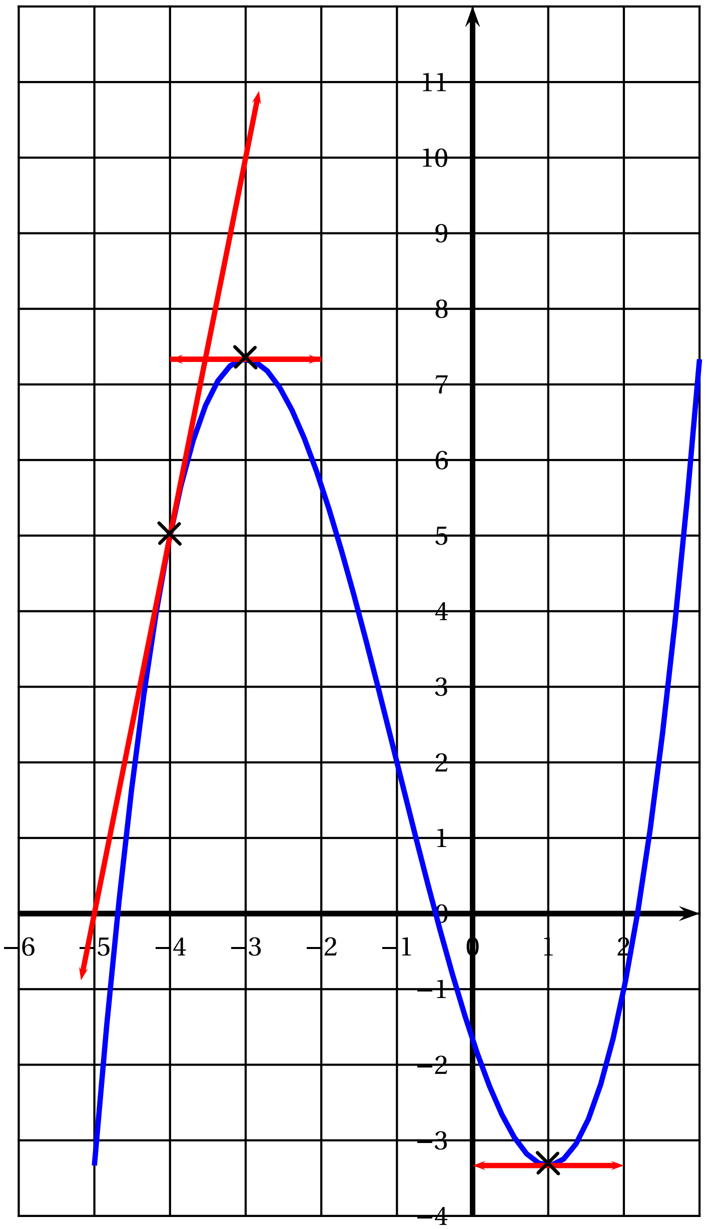
On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante : $h(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ si } x\leqslant 1\\ x^2 \text{ si } x>1\end{cases}$
Sur $]-\infty\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$, f est continue comme fonction usuelle.
Étude en 1 :

- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=2\times-1=1$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=1^2=1=f(1)$

On en déduit que f est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice VII (2 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction.



Sur la courbe, on a tracé les tangentes aux points d'abscisses -3 ; 1 et -4.

- En -3 et 1, les tangentes sont horizontales, donc $f'(-3) = 0$ et $f'(1) = 0$
- $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente ; celle-ci passe par les points de coordonnées (-5 ; 0) et (-4 ; 5).
  Le coefficient directeur est donc $f'(-4) = \dfrac{5-0}{-4-(-5)} = \dfrac{5}{1=-5}$: $\boxed{f'(-4) = 5}$.