Maths complémentaires : feuille d'exercices sur la dérivation

Exercice I

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer f', puis le signe de f sur I, et dresser alors le tableau de variation de f.

a) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$

b) $f(x) = -5x^2 + x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = 8x^2 - x + 9$ sur $I = \left[0\,;\,\dfrac{1}{16}\right]$.

d) $f(x) = -x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$ sur $I = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = -2x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$ sur $I = \left[-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$

Exercice II Forme d'une casserole

Cet exercice propose de comprendre pourquoi les casseroles ont toutes la même forme.

Pour réduire les coûts de fabrication, une entreprise doit fabriquer des casseroles cylindriques de volume v **donné** en utilisant le moins de métal possible. (on ne tient pas compte du manche)

On. note h la hauteur d'une casserole, x le rayon du disque du fond et S l'aire totale (aire latérale + aire du fond).

1. Montrer que $S = \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$.
2. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On notera α le nombre vérifiant $\alpha^3 = \dfrac{v}{\pi}$. Alors : $\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}$
3. En déduire, pour un volume v fixé, la valeur de x pour laquelle le coût de fabrication d' une casserole est le plus bas.
   Notons α cette valeur.
4. Montrer, que pour cette valeur α du rayon, la hauteur de la casserole est aussi α.
   Conclure quant à la forme des casseroles.