Maths complémentaires : correction de la feuille d'exercices sur la dérivation

Exercice I

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer f', puis le signe de f sur I, et dresser alors le tableau de variation de f.

a) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2 > 0$ donc f est croissante sur I.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) $f(x) = -5x^2 + x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

$f'(x) = -10x + 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{10}$ et $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{10}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{61}{20}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) $f(x) = 8x^2 - x + 9$ sur $I = \left[0\,;\,\dfrac{1}{16}\right]$.

$f'(x) = 16x - 1$ qui est négatif sur $I = \left[0\,;\,\dfrac{1}{16}\right]$.

x	0		$\frac{1}{16}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	9	$\searrow$	$\frac{287}{32}$

d) $f(x) = -x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$ sur $I = \mathbb{R}$.

$f'(x) = -3x^2 + 3x = -3x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

e) $f(x) = -2x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

$f'(x) = -6x^2 - x + 1$.

Étudions le signe de $f'(x)$:

$\Delta = 25 > 0$; il y a deux racines.

$x_1 = \dfrac{1+5}{-12} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-5}{-12} = \dfrac{1}{3}$.

$f'(x) = -6x^2 - x + 1$ est du signe de -6 (négatif) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{21}{8}$	$\nearrow$	$\frac{173}{54}$	$\searrow$	$-\infty$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$ sur $I = \left[-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = 2x+1 \end{cases}$.

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = 2 \end{cases}$.

$f'(x) = \dfrac{2x(2x+1) - 2x^2}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}$.

$f'(x)$ s'annule en -1 et 0 et $f'(x)$ est du signe du numérateur.

x	-1		$-\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$-$	$\|$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\|$

Exercice II Forme d'une casserole

Cet exercice propose de comprendre pourquoi les casseroles ont toutes la même forme.

Pour réduire les coûts de fabrication, une entreprise doit fabriquer des casseroles cylindriques de volume v **donné** en utilisant le moins de métal possible. (on ne tient pas compte du manche)

On. note h la hauteur d'une casserole, x le rayon du disque du fond et S l'aire totale (aire latérale + aire du fond).

1. - Le fond de la casserole a une aire égale à πx^2.
   - La surface latérale a une aire égale à $2\pi x \times h$.
   - On sait que le volume est v donc $\pi x^2 h = v$ donc $h = \dfrac{v}{\pi x^2}$.
   - Alors : $S = \pi x^2 + 2\pi x \times \dfrac{v}{\pi x^2} = \boxed{\pi x^2 + \dfrac{2v}{x}}$ après simplification.
2. $f'(x) = 2\pi x + 2v \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2\pi x - \dfrac{2v}{x^2} = \boxed{2\left(\dfrac{\pi x^3 - v}{x^2}\right)}$ qui est du signe de $\pi x^3 - v$.

   $\pi x^3 - v \geqslant 0 \Leftrightarrow x^3 \geqslant \dfrac{v}{\pi}$.

   On sait que la fonction cube est croissante, donc : $x^3 \geqslant \dfrac{v}{\pi} \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}$.

   On pose : $\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}$ Tableau de variation :

x	0		$\alpha = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Le volume de la casserole est bien minimum pour cette valeur α.
4. Pour $x = \alpha$, la hauteur de la casserole est $h = \dfrac{v}{\pi\alpha^2} = \dfrac{v\alpha}{\pi\alpha^3} = \dfrac{v\alpha}{\pi \times \frac{v}{\pi}} = \boxed{\alpha}$