ores ton du contrôle sur les équations du second degré et la forme canonique

Pour aller au corrigé du sujet A, cliquer sur **sujet A**
Pour aller au corrigé du sujet B, cliquer sur **sujet B**

RAPPEL : le nom s'écrit en CAPITALES D'IMPRIMERIE !

Exercice I

Soit $f(x) = 9x^2 + 6x + 3$.

a) $9x^2+6x+3$ est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $\begin{cases} a=9 \\ b=6 \\ c=3 \end{cases}$.

La forme canonique de $f(x)$ est

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$.

Alors : $\alpha = -\dfrac{6}{2\times 9} = \boxed{-\dfrac{1}{3}}$ (penser à simplifier !)

On en déduit :

$\beta = f(\alpha) = f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 9\times\dfrac{1}{9} + 6\times\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 3 = 1 - 2 + 3$

$= \boxed{2}$.

La forme canonique de $f(x)$ est donc

$$\boxed{f(x) = 9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + 2}.$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2 \geqslant 0$ donc $9\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2 \geqslant 0$ et, par conséquent, $\boxed{f(x) = 9\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2 + 2 \geqslant 2}$

Exercice II

a) $(3x+1)(x-5) = 0$

Un produit de facteurs est nul, si et seulement si, un des facteurs est nul.

Nous avons deux cas :

- Premier cas : $3x+1=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$
- Deuxième cas : $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}\ ;\ 5\right\}}$.

b) $x^2+10x+25=0 \Leftrightarrow x^2+2\times x\times 5+5^2=0 \Leftrightarrow (x+5)^2=0$ (identité remarquable).

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{-5\}}$

c) $2x^2+3x+5=0$ est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$.

Le discriminant vaut :

$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times 2\times 5 = 9-40 = -31 < 0$.

' Puisque le discriminant est négatif, l'équation n'a pas de solution.

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}.$$

d) $2x^2-12x+23=0$ est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $\begin{cases} a=2 \\ b=-12 \\ c=23 \end{cases}$.

Le discriminant vaut : $\Delta = b^2-4ac$

$= (-12)^2-4\times 2\times 23 = 144-184 = -40 < 0$

Puisque le discriminant est strictement négatf, l'équation n'a pas de solution.

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}.$$

e) $3x^2+x-5=0$ est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=-5 \end{cases}$.

Le discriminant vaut :

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times 3\times(-5) = 1+50 = 61 > 0$.

Puisque le discriminant est strictement positif, l'équation a deux solutions.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{61}}{6}$

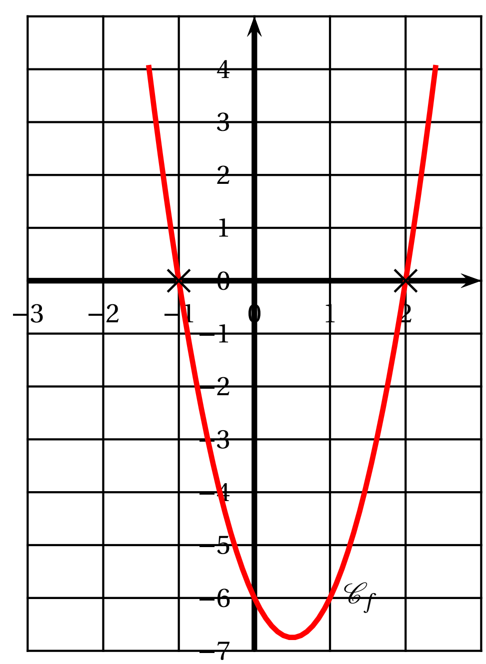
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}$

L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{-1-\sqrt{61}}{6}\ ;\ \frac{-1+\sqrt{61}}{6}\right\}}.$$

Exercice III (2,5 points)

Ci-dessous est représentée la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$.



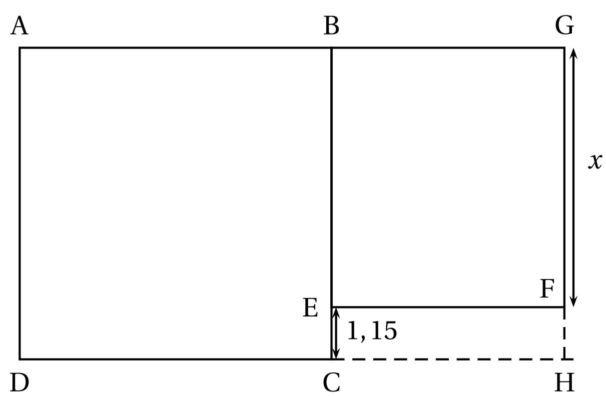
1. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en -1 et 2, donc l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions -1 et 2.
2. On en déduit que $f(x) = a(x-(-1))(x-2)$ donc
$$f(x) = a(x+1)(x-2).$$
3. Graphiquement : $f(0) = -6$.
Or, $f(0) = a(0+1)(0-2) = -2a$; on en déduit $a = 3$.
Par conqéquent : $\boxed{f(x) = 3(x+1)(x-2)}$.
4. En développant :
$f(x) = 3(x+1)(x-2) = 3\left(x^2-2x+x-2\right)$
$= 3\left(x^2-x-2\right)$ donc $\boxed{f(x) = 3x^2-3x-6}$.

Exercice IV (5 points)

Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 4x^2 - 12x + 5 \text{ (**forme 1**)}$$

1. $(2x-5)(2x-1) = 4x^2-2x-10x+5 = 4x^2-12x+5$
Donc $\boxed{f(x) = (2x-5)(2x-1)}$ (**forme 2**).
2. $4x^2-12x+5 = ax^2+bx+c$ avec $\begin{cases} a = 4 \\ b = -12 \\ c = 5 \end{cases}$.
La forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$ et
$\beta = f(\alpha) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 4\times\dfrac{9}{4} - 12\times\left(\dfrac{3}{2}\right)+5 = 9-18+5$
$= -4$ donc
$$f(x) = 4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \text{ (**forme 3**)}.$$
3. Il faut réfléchir pour utiliser la forme la mieux adaptée.
   (a) En utilisant la forme 1, on a $\boxed{f(0) = 5}$
   (b) Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on utilise la forme 2.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   On trouve : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{2} ; \dfrac{5}{2}\right\}}$.
   (c) $f(x) = 5 \Leftrightarrow 4x^2-12x = 0$ (en utilisant la forme 1).
   D'où : $4x(x-3) = 0$. (En mettant $4x$ en facteur)
   Les antécédents de 5 sont 0 et 3.
   (d) Pour tout x, $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$ donc
   $4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$ donc $4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0-4 \geqslant -4$
   (d'après la forme 3.)
   Ce minimum est atteint pour $x = \dfrac{3}{2}$.

Exercice V (4 points)



Le carré $ABCD$ a pour côté $x+1,15$ et le carré $BEFG$ a pour côté x.
Leurs aires sont $(x+1,15)^2$ et x^2.
On doit avoir $(x+1,15)^2 + x^2 = 80$.
En développant, on obtient :
$x^2+2,3x+1,3225+x^2 = 80 \Leftrightarrow \boxed{2x^2+2,3x-78,6775 = 0}$.
$\Delta = 2,3^2 - 4\times2\times(-78,6775) = 634,71 > 0$.
L'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-23-\sqrt{634,71}}{4} < 0$ et $x_2 = \dfrac{-2,3+\sqrt{634,71}}{4} \approx 5,72$.
x est une longueur donc un nombre positif.

$$\boxed{x = \frac{-2,3+\sqrt{634,71}}{4} \approx 5,72}.$$

RAPPEL : le nom s'écrit en CAPITALES D'IMPRIMERIE !

Spécialité Première : correction du contrôle équations du second degré (Sujet B)

Exercice I (1,5 points)

Soit $f(x) = 8x^2 + 8x + 5$.

a) $8x^2+8x+5$ est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $\begin{cases} a=8 \\ b=8 \\ c=5 \end{cases}$.

La forme canonique de $f(x)$ est

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$.

Alors : $\alpha = -\dfrac{8}{2\times 8} = -\dfrac{1}{2}$

On en déduit :

$\beta = f(\alpha) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 8\times\dfrac{1}{4} + 8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 5 = 2 - 4 + 5$
$= 3$.

La forme canonique de $f(x)$ est donc

$$\boxed{f(x) = 8\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 3.}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$ donc $8\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Par conséquent : $f(x) = 8\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3 \geqslant 3$.

Exercice II (7 points)

Résoudre les équations suivantes :

a) $(5x+1)(x-7) = 0$

Un produit de facteurs est nul, si et seulement si, un des facteurs est nul.

Nous avons deux cas :

- $5x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5}$
- $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$

L'équation a deux solutions : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{1}{5}\ ;\ 7\right\}}$.

b) $x^2 + 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\times 6\times x + 6^2 = 0 \Leftrightarrow (x+6)^2 = 0$.

(Identité remarquable)

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{-6\}}$

c) $2x^2 + 3x + 6 = 0$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=6 \end{cases}$.

Le discriminant vaut :

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 2\times 6 = 9 - 48 = -39 < 0$.

Le discriminant est strictement négatif; l'équation n'a pas de solution.

$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.

d) $3x^2 + 17x + 10 = 0$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\begin{cases} a=3 \\ b=17 \\ c=10 \end{cases}$.

Le discriminant vaut :

$\Delta = b^2 - 4ac = 17^2 - 4\times 3\times 10 = 289 - 120 = 169 > 0$.

Le discriminant est strictement positif : l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-17-\sqrt{169}}{2\times 3} = \dfrac{-17-13}{6} = -5$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-17+\sqrt{169}}{2\times 3} = \dfrac{-17+13}{6} = -\dfrac{2}{3}$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-5\ ;\ -\dfrac{2}{3}\right\}}$

e) $5x^2 + x - 2 = 0$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$.

Le discriminant vaut :

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 5\times(-2) = 1 + 40 = 41 > 0$.

Le discriminant est strictement positif : l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2\times 5} = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{10}$

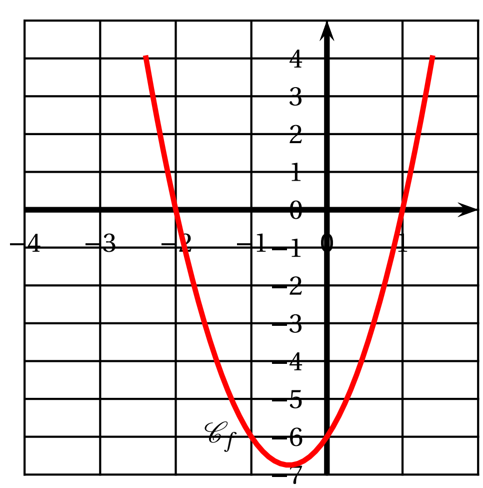
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2\times 5} = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{10}$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{-1-\sqrt{41}}{10}\ ;\ \frac{-1+\sqrt{41}}{10}\right\}.}$$

Exercice III (2,5 points)

Ci-dessous est représentée la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.



1. Graphiquement, les solutions de $f(x)=0$ sont -2 et 1
2. Alors : $f(x)=a(x-(-2))(x-1)=\boxed{a(x+2)(x-1)}$
3. Graphiquement : $f(0)=-6$.
   On en déduit $f(0)=-6=a\times 2\times(-1)=-2a$ donc $\boxed{a=3}$.
   'par conséquent : $\boxed{f(x)=3(x+2)(x-1)}$
4. $f(x)=3(x+2)(x-1)=3\left(x^2-x+2x-2\right)$
   $=3\left(x^2+x-2\right)=\boxed{3x^2+3x-6}$

Exercice IV (5 points)

Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :

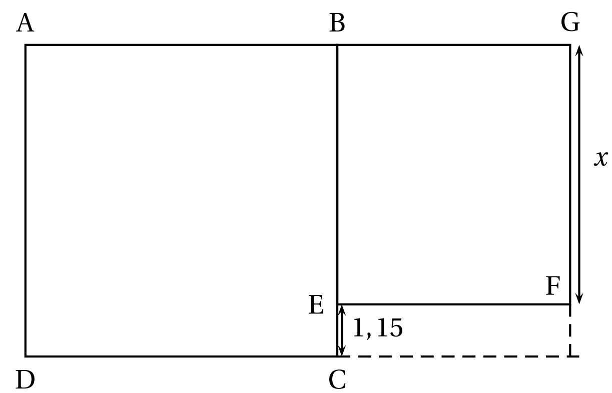
$$f(x)=4x^2-20x+9 \text{ (\textbf{forme 1})}$$

1. $(2x-9)(2x-1)=4x^2-2x-18x+9$
   $=4x^2-20x+9=f(x)$ donc :
   $$\boxed{f(x)=(2x-9)(2x-1)} \text{ (\textbf{forme 2})}$$
2. Cherchons la forme canonique :
   $f(x)=4x^2-20x+9=ax^2+bx+c$ avec $\begin{cases} a=4 \\ b=-20 \\ c=9 \end{cases}$.
   La forme canonique est $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\begin{cases} \alpha=-\dfrac{b}{2a} \\ \beta=f(\alpha) \end{cases}$.
   $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}$.
   $\beta=f(\alpha)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=4\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-20\times\dfrac{5}{2}+9$
   $=25-50+9=-16$.
   Donc $\boxed{f(x)=4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-16}$ (**forme 3**).
   (a) On utilise la forme 1 : $f(x)=4x^2-20x+9$ donc $\boxed{f(0)=9}$
   (b) Pour résoudre l'équation $f(x)=0$, on utilise la forme 2 :
   $f(x)=0 \Leftrightarrow (2x-9)(2x-1)=0$.
   Un produit de facteurs est nul, si et seulement si, un des facteurs est nul.
   - Premier cas : $2x-9=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}$
   - Deuxième cas : $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

   L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{9}{2}\right\}}$
   (c) Pour déterminer les antécédents éventuels de -16 par f, on utilise la forme 3 :
   $f(x)=-16 \Leftrightarrow 4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-16=-16$
   $\Leftrightarrow 4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.
   L' antécédents de -16 par f est $\dfrac{5}{2}$.
   (d) On utilise la forme 3.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2\geqslant 0$ donc $4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2\geqslant 0$ donc,
   $\boxed{f(x)=4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-16\geqslant -16}$.
   Ce minimum est atteint pour $x=\dfrac{5}{2}$.

Exercice V (4 points)

Un architecte travaille sur le plan d'une maison.



Le carré $ABCD$ a pour côté $x+1,15$ et le carré $BEFG$ a pour côté x.
Leurs aires sont $(x+1,15)^2$ et x^2.
On doit avoir $(x+1,15)^2+x^2=80$.
En développant, on obtient :
$x^2+2,3x+1,3225+x^2=80 \Leftrightarrow \boxed{2x^2+2,3x-78,6775=0}$.
$\Delta=2,3^2-4\times2\times(-78,6775)=634,71>0$.
L'équation a deux solutions :
$x_1=\dfrac{-23-\sqrt{634,71}}{4}<0$.
$x_2=\dfrac{-2,3+\sqrt{634,71}}{4}\approx 5,72$.
x est une longueur donc un nombre positif.

$$\boxed{x=\dfrac{-2,3+\sqrt{634,71}}{4}\approx 5,72}.$$