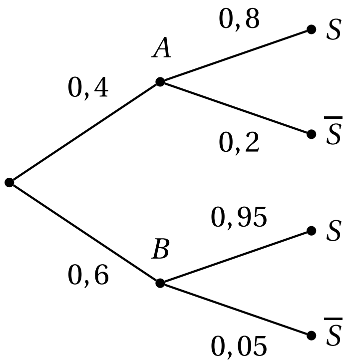
Correction Métropole juin2016

Exercice I

Partie A

Schématisons la situation par un arbre :



1. D'après la formule de probabilités totales, on a :
   $p(S) = p_A(S) \times p(A) + p_B(S) \times p(B) = 0,8 \times 0,4 + 0,95 \times 0,6 = 0,32 + 0,57 = \boxed{0,89}$.
2. $p_S(A) = \dfrac{p((S \cap A)}{p(S)} = \dfrac{0,4 \times 0,8}{0,89} = \dfrac{0,32}{0,89} = \dfrac{32}{89} \approx \boxed{0,36}$

Partie B

1. On a : $n = 400$ et $f = 0,92$.
   $n \geqslant 30$, $nf = 368 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 32 \geqslant 5$.
   Les conditions sont réunies pour utiliser un intervalle de confiance.
   Au seuil de confiance de 95 %, un intervalle de confiance est :
   $I_{95} = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,92 - \dfrac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ 0,92 + \dfrac{1}{\sqrt{400}}\right] = \left[0,92 - \dfrac{1}{20}\ ;\ 0,92 + \dfrac{1}{20}\right] = \boxed{[0,87\ ;\ 0,97]}$
2. L'amplitude de cet intervalle de confiance est $\boxed{\dfrac{2}{\sqrt{n}}}$.

   On doit donc avoir $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02$ qui donne $\sqrt{n} \geqslant 100$, donc $\boxed{n \geqslant 10\,000}$.

Partie C

1. (a) $P(T \leqslant a)$ est l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

   (b) $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = \boxed{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} (-\lambda t) = -\infty$ car $\lambda > 0$ donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} = \lim_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P(T \leqslant t) = \boxed{1}$.
2. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0,5$ donc $1 - \mathrm{e}^{7\lambda} = 0,5$, d'où $\mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5$ qui donne $-7\lambda = \ln 0,5$ donc
   $\lambda = \dfrac{\ln 0,5}{-7} \boxed{\approx 0,099}$ à 10^{-3} près.
3. On suppose que $\lambda = 0,099$.

(a) $P(T \leqslant 5) = 1 - P(T < 5) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-5\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-5\lambda} = \mathrm{e}^{-5\times 0{,}099)} \boxed{\approx 0{,}61}$.

(b) On sait que la loi exponentielle est une loi du durée de vie sans vieillissement, donc $P_{(T\leqslant 2)}(T \leqslant 7) = P(T \leqslant 5) \boxed{\approx 0{,}61}$.

(c) L'espérance d'une loi exponentielle est $\boxed{\dfrac{1}{\lambda} \approx 10}$ à une unité près.

Cela signifie que, sur un grand nombre de ces composants électroniques, la durée de vie est en moyenne de 10 ans.

Exercice II

Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$, on donne les points :
A(1 ; 2 ; 3), B(3 ; 0 ; 1), C(-1 ; 0 ; 1), D(2 ; 1 ; -1), E(-1 ; -2 ; 3) et F(-2 ; -3 ; 4).

Affirmation 1 : fausse

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 2 : vraie

Puisque les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, ils définissent le plan ABC.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Alors : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = -2 + 2 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = -2 + 2 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal au plan (ABC)

Affirmation 3 : vraie

Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc (AB) est sécante au plan (ABC).

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $y - y_A - (z - z_A) = 0$ donc $y - 2 - (z - 3) = 0$ d'où $y - z = -1$.

Une représentation paramétrique de la droite (EF) est :

$$(EF) : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$$

(EF) et (ABC) sont sécants s'il existe un point appartenant à la fois à la droite (EF) et au plan (ABC), donc s'il existe une valeur de t unique telle que : $(-2 - t) - (3 + t) = -1$ donc $t = -2$.

Le point d'intersection I de (EF) et de (ABC) est I0 (1 ; 0 ; 1).

Le milieu de [BC] est M(1 ; 0 ; 1) donc la droite (EF) et le plan (ABC) sont bien sécants et leur point d'intersection est bien le milieu de [BC].

Affirmation 4 : fausse

$y_D - z_D = 2 \neq -1$ donc D n'appartient pas au plan (ABC) ; les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas coplanaires et peuvent donc pas être sécantes.

Exercice III

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$.

Partie A

1. $f(x) = x \iff \ln\left(x^2+1\right) = 0 \iff x^2+1 = 1 \iff x = 0$: l'équation a pour solution le nombre 0.
2. f est dérivable somme somme et composée de fonctions dérivables.

   $f = u - \ln(v)$ donc $f' = u' - \dfrac{v}{v'}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = x^3+1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.

   On en déduit que $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \boxed{\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} \leqslant 0}$ avec $f'(x) = 0$ pour $x = 1$.

   f est donc bien croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(1) = 0$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{X\to-\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$.
3. Soit x un réel de $[0~;~1]$; f est croissante sont $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$;

   Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(2) < 1$ donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$;

   Pour tout x appartenant à $[0~;~1]$, $f(x)$ appartient à $[0~;~1]$.
4. (a) Cet algorithme donne le plus petit entier pour lequel $N - \ln\left(N^2+1\right) \geqslant A$.

   (b) À la calculatrice, on trouve $\boxed{n = 110}$

Partie B

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) = f(u_n)$.

1. Montrons par récurrence que u_n appartient à $[0~;~1]$ pour tout n.
   - Initialisation : $u_0 = 1 \in [0.1]$
   - Hérédité : on suppose que $u_n \in [0~;~1]$ pour un entier n quelconque.

     D'après A.4), on en déduit que $u_{n+1} \in [0~;1]$; la propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.
2. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right) \leqslant 0$ car $u_{n+1}^2 + 1 \geqslant 1$.

   La suite est donc **décroissante**.
3. D'après 1., la suite est minorée et on vient de voir qu'elle est décroissante, donc elle est convergente vers un réel $\ell \geqslant 0$.
4. On admet que $f(\ell) = \ell$.

   On en déduit que $\ell = 0$ d'après A 1.

Exercice III (pour les élèves suivant l'enseignent de spécialité

1. (a) Si $(x~;~y)$ est un couple d'entier relatifs alors :

   $15x - 12y = 3 \times (5x - 4y)$ est un multiple de 3 et est donc **divisible par 3**.

   (b) Soient $(x~;~y)$ les coordonnées d'un point de la droite Δ_1.

   Alors :

   $y = 54x - 23 \Leftrightarrow 12y = 15x - 8 \Leftrightarrow 15x - 12y = 8$.

   Or 8 n'est pas divisible par 3.

   Aucun des points de la droite Δ_1 n'a ses deux coordonnées entières.

Généralisation

2. (a) Le couple $[x_0\ ;\ y_0]$ vérifie $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

   Donc $ny_0 = mx_0 - \dfrac{pn}{q}$.

   Soit $ny_0 - mx_0 = -\dfrac{pn}{q}$.

   Puisque n, y_0, m et x_0 dont des entiers naturels alors $ny_0 - mx_0$ aussi et par conséquent $\dfrac{np}{q}$ l'est également.

   Cela signifie que $\boxed{q \text{ divise } np}$.

   (b) p et q sont premiers entre eux et q divise np par conséquent, d'après le **théorème de Gauss**, q divise n.

3. (a) n et m sont premiers entre eux.

   D'après le **théorème de Bezout**, il existe donc deux entiers relatifs a et b tels que : $an + bm = 1/$

   Puisque $n = qr$, on obtient $aqr + bm = 1$.

   Il suffit donc de prendre $u = a$ et $v = -b$ pour obtenir $\boxed{qru - mv = 1}$.

   (b) On veut trouver un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ tels que :

   $y_0 = \dfrac{mx_0}{n} - \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow ny_0 = mx_0 - \dfrac{np}{q} \Leftrightarrow ny_0 - mx_0 = -pr$.

   Or il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tel que :

   $qru - mv = 1 \Leftrightarrow -pr(qru - mv) = -pr \Leftrightarrow -prnu + prmv = -pr$.

   Prenons alors $y_0 = -pru$ et $x_0 = -prv$.

4. Si $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{7}{4}$, alors $m = 3$, $n = 8$, $p = 7$ et $q = 4$.

   pgcd$(3\ ;\ 8) = 1$ et pgcd$(7\ ;\ 4) = 1$.

   4 divise 8 donc cette droite possède bien un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

5. (a) Si Q ne divise pas N, alors on ne rentre pas dans la boucle Tant que et l'algorithme d'arrête.

   Si Q divise N, alors d'après la question 3.b., pour tous les entiers relatifs m, n, p, q tels que pgcd$(m\ ;\ n)$ = pgcd$(p\ ;\ q) = 1$ et q divise n, il existe un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ tels que $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

   On va donc trouver un entier relatif x_0 tel que $\dfrac{m}{n}x0 - \dfrac{p}{q}$ soit entier.

   Cet entier est soit positif, soit négatif.

   La boucle Tant que s'arrête si l'une des deux conditions n'est pas vérifiée ce qui, d'après ce qui vient d'être dit, arrivera au moins une fois.

   (b) Cet algorithme permet de trouver un point de Δ dont les coordonnées sont entières.

Exercice IV

1. On a clairement $\tan\alpha = \dfrac{EA}{ET} = \dfrac{25}{x}$ et $\tan\beta = \dfrac{EB}{ET} = \dfrac{30,6}{x}$.

2. tan est dérivable sur l'intervalle considéré comment quotient de fonctions dérivables.

   $\tan'(x) = \dfrac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$.

   La fonction tan est bien **croissante** sur $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. $\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1/tan\beta\tan\alpha} = \dfrac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{30,6}{x}} = \dfrac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} = \boxed{\dfrac{5,6x}{x^2 + 765}}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal quand γ est maximal ; comme la fonction tan est croissante, il faut que $\tan\gamma$ soit maximal, donc que $\dfrac{5,6x}{x^2+765}$ soit maximal, donc que $\dfrac{x}{x^2+765}$ soit maximal, donc que $\dfrac{x^2+765}{x^2}$ soit minimum (décroissance de la fonction inverse), donc il faut que $x+\dfrac{765}{x}$ soit minimum car $x+\dfrac{765}{x}$ $=\boxed{\dfrac{x^2+765}{x}}$.

   On pose $f(x)=x+\dfrac{765}{x}$.

   f est dérivable sur $]0\,;\,50]$ et $f'(x)=1-\dfrac{765}{x^2}=\dfrac{x^2-765}{x^2}$.

   $f'(x)$ s'annule en $\sqrt{765}$ et est négative sur $]0\,;\,\sqrt{765}]$.

   f est donc décroissante sur $\left]0\,;\,\sqrt{765}\right[$ puis croissante sur $\left[\sqrt{975}\,;\,50\right]$.

   Le minimum est donc atteint pour $\boxed{x=\sqrt{765}}$.

   On a alors $\tan\gamma\approx 0,101234$ d'où $\gamma\approx 0,10$ radian (environ 5,78 degrés)