Spécialité Première : correction du contrôle commun

Exercice I (5 points)

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$.

$f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=x+1 \\ v(x)=\mathrm{e}^x \end{cases}$

Alors : $f'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v'(x)=\mathrm{e}^x \end{cases}$.

$f'(x)=\dfrac{1\times \mathrm{e}^x-(x+1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{(1-(x+1))\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=-\dfrac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\boxed{-\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}$.

(Réponse d))

Question 2

$\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^{-b}}=\mathrm{e}^{a-(-b)}=\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^{b-(-a)}=\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^b}{\mathrm{e}^{-a}}}$

Réponse c)

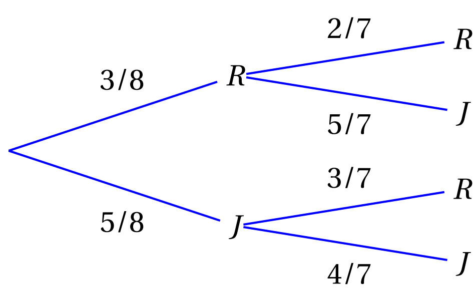
Question 3

- $u_6=u_3+3r$ donc $r=\dfrac{u_6-u_3}{3}=\dfrac{3-\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{3}=-\dfrac{1}{2}$; $\boxed{r=-\dfrac{1}{2}}$
- $u_0=u_3-3r=\dfrac{9}{2}-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}=6$; $\boxed{u_0=6}$

Réponse a)

Question 4

On tire deux boules successivement sans remise dans une urne contenant 3 boules rouges et 5 boules jaunes. Cette expérience est décrite par l'arbre ci-dessous.



On utilise la formule des probabilités totales :
La probabilité de tirer une boule jaune au deuxième tirage est :

$p(R\cap J)=p(J\cap J)=\dfrac{5}{7}\times\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{7}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{56}+\dfrac{5}{14}=\dfrac{13}{28}=\dfrac{35}{56}=\boxed{\dfrac{5}{8}}$

réponse c)

Question 5 Soit $S=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}$.

On reconnait la somme $S_n=1+q+\cdots+q^n$ avec $q=\dfrac{1}{2}$ et $n=15$.

Alors : $S=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1}6}{\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{16}\right)=2-2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{16}=2-2\times\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}=\boxed{2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}}$

Réponse (b)

Remarque la réponse d), 1,999 969 482 n'est qu'une valeur approchée, pas la valeur exacte !

Les réponses étaient donc $\boxed{\text{d-c-a-c-b}}$

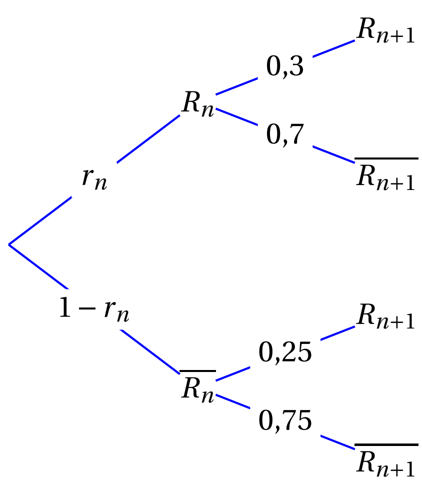
Exercice II **(8 points)**

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.
On considère :

- un salarié malade est toujours absent.
- la première semaine de travail, le salarié n'est pas absent.
- si la semaine n, le salarié n'est pas malade, alors la probabilité qu'il soit malade la semaine $n+1$ est 0,25.
- si la semaine n, le salarié est malade, alors la probabilité qu'il soit malade la semaine $n+1$ est 0,3.

On choisit au hasard un salarié dans l'entreprise. Pour tout entier naturel n non nul, on note l'événement R_n : « le salarié est malade à la n-ième semaine ».

1) - $r_1=0$ puisque la première semaine, le salarié n'est pas malade.
   - $r_2=0,25$ d'après l'énoncé.
2) Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le salarié soit malade à la n-ième semaine.
   On a alors $r_n=P(Rn)$.
   Complétons l'arbre pondéré ci-dessous. (Aucune justification n'est attendue).



3) On applique la formule des probabilités totales :
   $r_{n+1}=P(n+1)=P(R_{n+1}\cap R_n)+P\left(R_{n+1}\cap\overline{R_n}\right)$
   $=0,3r_n+0,25(1-r_n)=0,3r+0,25-0,25r_n=\boxed{0,25+0,05r_n}$
4) Pour tout entier naturel n non nul, on considère la suite (n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=r_n-\dfrac{5}{19}$.
   Pour tout n, on a :
   $v_{n+1}=r_n-\dfrac{5}{19}=0,25+0,05r_n-\dfrac{5}{19}$
   $=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}r_n-\dfrac{5}{19}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{19}+\dfrac{1}{20}r_n$

$= \dfrac{95-100}{380} + \dfrac{1}{20}r_n = -\dfrac{1}{76} + \dfrac{1}{2}0r_n$

$= \dfrac{1}{20}\left(r_n - \dfrac{5}{19}\right) = \boxed{\dfrac{1}{20}v_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{20}v_n$.

(v_n) est **géométrique**, de raison $q = \dfrac{1}{20}$ et de premier terme $v_1 = r_1 - \dfrac{5}{19} = -\dfrac{5}{19}$.

La première semaine, le salarié n'est pas absent, donc pas malade : $r_1 = 0$.

5) Puisque (v_n) est géométrique de raison $q == \dfrac{1}{20}$, on a :

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \boxed{-\dfrac{5}{19} \times \left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}}$.

$v_n = r_n - \dfrac{5}{19} \iff r_n = \dfrac{5}{19} + v_n = \dfrac{5}{19} - \dfrac{5}{19} \times \left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1} = \boxed{\dfrac{5}{19}\left[1 - \left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}\right]}$

6) À l'aide de la calculatrice, on voit que les valeurs se rapprochent de plus en plus de 0,263, en fait de $\dfrac{5}{19}$.

À long terme, la probabilité qu'un salarié soit malade une semaine est $\boxed{\dfrac{5}{19} \approx 0,263}$.

Exercice III (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1) $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 3x + 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

Alors : $f' = (uv)' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u'(x) = 2x - 3 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

On en déduit : $f'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x + \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x$

$= \left(2x - 3 + x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x = \boxed{\left(x^2 - x - 2\right)\mathrm{e}^x}$

2) L'équation réduite de la tangente) $\mathscr{C}_f$ en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Avec $a = 0$, on obtient $y = f'(0)x + f(0)$.

$f'(0) = -2$ et $f(0) = 1$.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est donc : $\boxed{y = -2x + 1}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc

$f'(x) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$.

Il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$;

$\boxed{\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 2\}}$.

On pouvait aussi voir que -1 est une racine évidente.

4) Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - x - 2$.

Ce trinôme du second degré est du signe du coefficient de x^2, 1, positif, à l'extérieur d l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.

On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		2		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{5}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^2$	$\nearrow$	

5) On admet que f est positive sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.

D'après le tableau de variation, $f(x) \geqslant -\mathrm{e}^2$ sur $[-1\ ;\ +\infty[$ avec un minimum, $-\mathrm{e}^2$, atteint en $x = 2$.

Comme f est positive sur $]-\infty\ ;\ 1]$, $\boxed{f(x) \geqslant -\mathrm{e}^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Courbe (non demandée et la tangente en 0) :