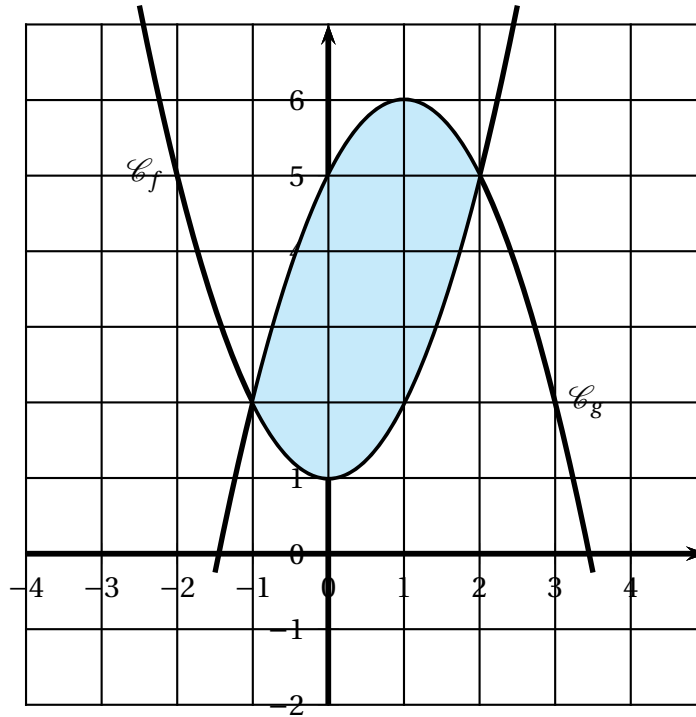


Correction des calculs d'aire entre deux courbes

Exercice I

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admet que pour tout x de $[-1; 2]$, on a $0 \leq f(x) \leq g(x)$.



Cette aire \mathcal{A} vaut :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 2x + 5) - (x^2 + 1)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = 2 \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx.$$

Posons $h(x) = -x^2 + x + 2$.

Une primitive est $H(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$.

Alors : $\mathcal{A} = 2 [H(x)]_{-1}^2 = 2 (H(2) - H(-1))$.

- $H(2) = \frac{10}{3}$

- $H(-1) = -\frac{7}{6}$

On en déduit : $\mathcal{A} = 2 \left(\frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) \right) = \boxed{9 \text{ u.a.}}$.

Exercice II

On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \text{ et } g(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}.$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes respectives des fonction f et g .

1) On résout l'équation $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \iff \frac{\ln(x)}{x} = \frac{(\ln(x))^2}{x} \iff \frac{\ln(x) - (\ln(x))^2}{x} = 0 \iff \frac{\ln(x) [1 - \ln(x)]}{x} = 0 \iff \ln(x) (1 - \ln(x)) = 0.$$

Soit $\ln(x) = 0 \iff x = 1$

Soit $1 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$ Les deux courbes ont deux points communs, de coordonnées $(1; 0)$ et $e; \frac{1}{e}$.

2) On étudie le signe de $f(x) - g(x)$.

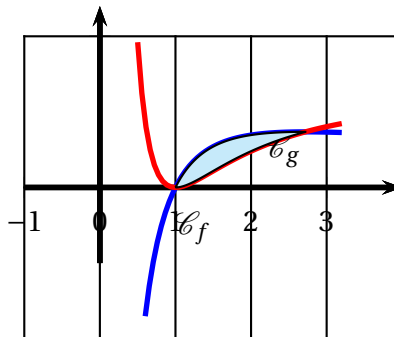
$$f(x) - g(x) = \frac{\ln(x) [1 - \ln(x)]}{x}.$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+	+
$1 - \ln(x)$	+	+	0	-
x	+	+	+	+
$f(x) - g(x)$	-	0	0	-

On en déduit que $f(x) \geq g(x)$ sur $[1; e]$.

3) On a tracé les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

$g(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$ L'unité est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 4 cm sur l'axe des ordonnées.



$$\mathcal{A} \int_1^e [f(x) - g(x)] dx = \int_1^e \left[\frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(x)^2}{x} \right] dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx - \int_1^e \frac{(\ln(x))^2}{x} dx \text{ (par linéarité).}$$

On pose $u(x) = \ln(x)$; alors $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Par conséquent :

- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = u'(x)u(x)$ qui a pour primitive $F = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$.

$$\int_1^e f(x) dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}$$

- $g(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x} = u'(x)u^2(x)$ qui a pour primitive $G = \frac{1}{3}u^3 = \frac{1}{3}(\ln(x))^3$.

$$\int_1^e g(x) dx = G(e) - G(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

- D'où : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$

Or, 1 u.a. = 6 cm², donc $\mathcal{A} = 1 \text{ cm}^2$