Correction du bac blanc Terminale S (février 2013)

I

Partie A

1. **Restitution organisée de connaissance**

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. (on ne peut donc pas utiliser les formules de croissances comparées, puisqu'il s'agit de démontrer cette limite.

(a) Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}.$$

Étudions les variation de φ :
φ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.
$\varphi'(x) = e^x - x > 0$ d'après le rappel.
On en déduit que la fonction est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; $\varphi(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$,

$$\boxed{\varphi(x) \geqslant 1.}$$

(b) On en déduit que, pour tout $x \geqslant 0$, $\varphi(x) > 0$, c'est-à-dire $e^x > \dfrac{x^2}{2}$. Pour $x > 0$, on en déduit, en divisant par x, que $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right) = +\infty$, d'après le rappel, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty}$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}.$$

(a) On pose $X = \dfrac{x}{2}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = \lim\limits_{X\to}\left(\dfrac{X}{e^X}\right)$.
On a montré que $\lim\limits_{X\to}\left(\dfrac{e^X}{X}\right)$ donc
$\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{X}{e^X}\right) = 0$.
Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

(b) f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
$f = ue^{-u}$ avec $u(x) = \dfrac{1}{2}x$.
$f' = \left(ue^{-u}\right)' = u' \times e^{-u} + u \times \left(-u'e^{-u}\right)$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{2}$.
Par conséquent :
$f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \dfrac{1}{2}x \times \left(-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)$
$= \boxed{\dfrac{1}{4}(2-x)e^{-\frac{1}{2}x}}$.
Pour tout $x \leqslant 0$, $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ et $\dfrac{1}{4} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 - x$, donc positif pour $0 \leqslant x \leqslant 2$, nul poutr $x = 2$ et négatif pour $x > 2$.
$f(0) = 0$; $f(2) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.
On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t \geqslant 0$).

On constate expérimentalement que la vitesse de libération $g'(t)$ du médicament dans le sang vérifie l'égalité, pour tout $t \geqslant 0$, :

$$g'(t) = -\frac{1}{2}\left[g(t) - e^{-\frac{t}{2}}\right].$$

1. Soit la fonction $g_k : t \mapsto \dfrac{t}{2}e^{-\frac{t}{2}} + ke^{-\frac{t}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$.
$g_k(t) = \dfrac{1}{2}te^{-\frac{t}{2}} + ke^{-\frac{t}{2}}$.
g_k est dérivable comme somme, produit et composée de fonctions dérivables.

- $g_k'(t) = \dfrac{1}{2}\left[1 \times e^{-\frac{t}{2}} + t \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}\right] - \dfrac{k}{2}e^{-\frac{t}{2}}$
$= \dfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left[1 - \dfrac{t}{2} - k\right]$.
- $-\dfrac{1}{2}\left[g_k(t) - e^{-\frac{t}{2}}\right] = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t}{2}e^{-\frac{t}{2}} + ke^{-\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right] =$
$\dfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left[1 - \dfrac{t}{2} + k\right]$.

On en déduit que $\boxed{g_k'(t) = -\dfrac{1}{2}\left[g(t) - e^{-\frac{t}{2}}\right]}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Montrer alors que la fonction g_k solution est la fonction f de la partie A. La fonction correspondant à la libération du médicament est donc une fonction g_k. Comme à $t=0$, la quantité de principe actif est nulle, on doit avoir $g_k(0)=0$; or $g_k(0)=k$ donc $k=0$.

La fonction est donc $\boxed{g_0 : t \longmapsto \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}$, c'est-à-dire la fonction f étudiée précédemment.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable n.
Traitement	Tant que $f(n) > 0,1$
	n prend la valeur $n+1$.
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de n.

où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

(a) On a vu que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$, donc il existe un réel α_0 tel que $t>\alpha_0 \Rightarrow f(t)<0,1$.
On en déduit que l'algorithme s'arrête et donne donc une valeur en sortie le premier entier n tel que $f(n)<0,1$.

(b) On fait un tableau de valeurs à la calculatrice pour trouver cette valeur ; on trouve $\boxed{n=8}$.

(c) L'algorithme permet de savoir à quelle heure la quantité de principe actif est inférieure à 0,1 (donc on peut considérer qu'il n'y en a plus). On trouve que c'est au bout de 8 heures, donc à 16 heures.

II Métropole septembre 2011

1. On a $z_{\mathrm{B}'} = \dfrac{2-\mathrm{i}-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \dfrac{2-2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$ $= \boxed{\dfrac{1-1-2\mathrm{i}}{1+1} = -\mathrm{i}}$.

2. Avec $z \neq \mathrm{i}$, $z=z' \iff x+\mathrm{i}y = \dfrac{x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}y+\mathrm{i}}$

$\iff (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y+\mathrm{i}) = x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}$

$\iff x^2+y^2-y-xy\mathrm{i}+\mathrm{i}x+xy\mathrm{i} = x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}$

$\iff x^2+y^2-y+\mathrm{i}x = x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}$

$\iff \begin{cases} x^2+y^2-y &= x \\ x &= y-1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (y-1)^2+y^2-y &= y-1 \\ x &= y-1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2y^2-3y+1 &= y-1 \\ x &= y-1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2y^2-4y+2 &= 0 \\ x &= y-1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y^2-2y+1 &= 0 \\ x &= y-1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (y-1)^2 &= 0 \\ x &= y-1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y &= 1 \\ x &= 0 \end{cases}$

Cette solution n'est pas valide ($z=\mathrm{i}$), puisque par définition $z\neq \mathrm{i}$.

Conclusion : la transformation n'a pas de point invariant.

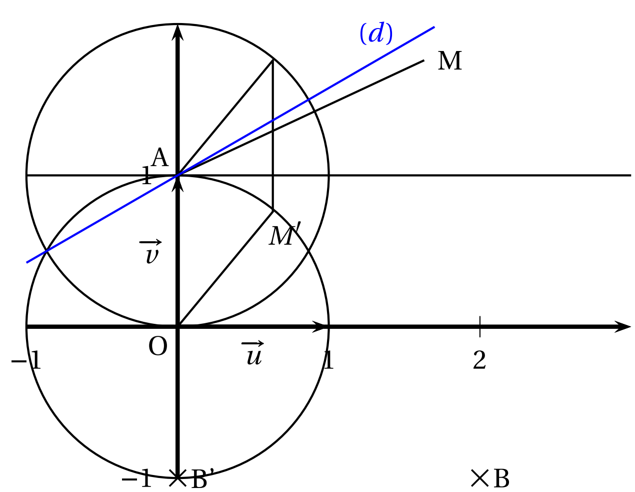
3. (a) On a $\overline{z}+\mathrm{i} = \overline{z}+\overline{-\mathrm{i}} = \overline{z+(-\mathrm{i})} = \overline{z-\mathrm{i}}$. (le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués.)

(b) D'après l'égalité précédente :
$z' = \dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}} = \dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z-\mathrm{i}}} \Rightarrow |z'| = \left|\dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z-\mathrm{i}}}\right| = \dfrac{|z-\mathrm{i}|}{\left|\overline{z-\mathrm{i}}\right|} = 1$
puisque le module d'un complexe est égal à celui de son conjugué.

Conclusion : $|z'| = \boxed{\mathrm{O}M'=1}$.
Tous les points images appartiennent au cercle trigonométrique, centré en O et de rayon 1.

(c) De même l'égalité $z' = \dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z-\mathrm{i}}}$ donne pour les arguments :
$\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z-\mathrm{i}}}\right)$
$\iff \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) - \left[-\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)\right] =$ $\boxed{2\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)}$.

(d) On a vu que le point M' appartient au cercle trigonométrique ; il suffit de trouver un des arguments.
D'après la question précédente, on peut doubler l'argument de $z-\mathrm{i}$ sur le cercle centré en A de rayon 1 et en reportant cet argument sur le cercle trigonométrique. Voir la figure.

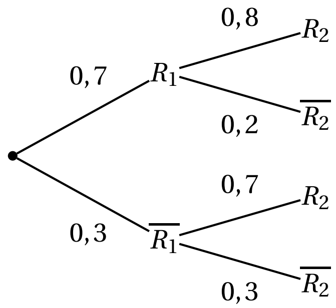


4. (a) Voir la figure : droite contenant A et faisant un angle de $\dfrac{\pi}{6}$ avec l'axe des abscisses.

(b) On a vu que si M est un point de la droite (d) distinct de A, un argument de son image M' est égale à $2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
On a aussi démontré que $\mathrm{O}M' = 1$.
L'image de la droite (d) est donc réduite au seul point du cercle trigonométrique d'argument $\frac{\pi}{3}$: c'est le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

III Amérique du sud novembre 2012

1. (a) On a l'arbre de probabilités suivant :



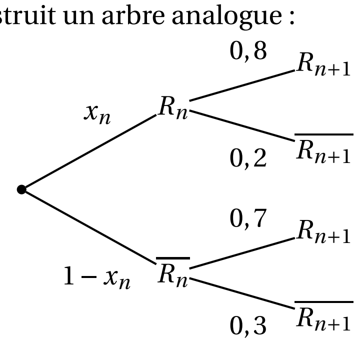
On a
$p(X=2) = 0,7 \times 0,8 = \boxed{0,56}$;
$p(X=0) = 0,3 \times 0,3 = \boxed{0,09}$;
$p(X=1) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,7 = 0,14 + 0,21$
$= \boxed{0,35}$ ou
$(p(X=1) = 1 - [p(X=0) + p(X=2)])$.
La loi de probabilité de X est donc :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	0,09	0,35	0,56

(b) $\mathrm{E}(X) = 2 \times 0,56 + 1 \times 0,35 + 0 \times 0,09 = 1,12 + 0,35$
$= 1,47$.
$\boxed{\mathrm{E}(X) = 1,47}$

2. (a) D'après l'énoncé $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,8$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0,7$.

(b) On construit un arbre analogue :



On a donc $x_{n+1} = x_n \times 0,8 + (1 - x_n) \times 0,7$
$= 0,8x_n - 0,7x_n + 0,7 = \boxed{0,7 + 0,1x_n}$.

3. (a) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $u_{n+1} = 9x_{n+1} - 7$
$= 9(0,7 + 0,1x_n) - 7 = 6,3 + 0,9x_n - 7$
$= 0,9x_n - 0,7 = 0,1(9x_n - 7) = \boxed{0,1u_n}$.
$u_{n+1} = 0,1u_n$ quel que soit le naturel n non nul donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,1, de premier terme $u_1 = 9x_1 - 7 = 9 \times 0,7 - 7$
$= -0,7$.

(b) On sait que pour tout naturel n,
$u_n = u_1 \times r^{n-1} = \boxed{-0,7 \times 0,1^{n-1}}$.
Comme $-1 < 0,1 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^{n-1} = 0$, donc
$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.
Par suite, comme $x_n = \frac{u_n + 7}{9}$,
$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{7}{9} \approx 0,777778}$.
Sur un très grand nombre de services le pourcentage de services réussis se rapproche de 77,8 %.

IV

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$.

1. Sur l'annexe , on a tracé la courbe d'équation $y = \frac{x}{1+2x}$.
   (a) Voir graphique.
   (b) On conjecture que la suite (u_n) tend vers 0.

   On cherche à déterminer la limite de la suite (u_n).

2. **Méthode 1**
   (a) Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+2x}$.
   $f'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;\,=\infty[$.

   (b) Démontrons par récurrence que, pour tout n, $0 < u_{n+1} < u_n$.
   - $u_1 = \frac{u_0}{1 + 2u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ donc $0 < u_1 < u_0$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - Supposons que $0 < u_n < u_{n+1}$ pour un entier n quelconque.
     Comme f est croissante, on a $f(0) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$ donc $0 < u_{n+2} < u_{n+1}$. la propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

   (c) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée, donc convergente vers un réel ℓ.

u_{n+1} tend vers ℓ ; $\dfrac{u_n}{1+2u_n}$ vers $\dfrac{2\ell}{1+2\ell}$; par unicité de la limite, on a $\ell = \dfrac{\ell}{1+2\ell}$.

On en déduit : $\ell\left[1-\dfrac{1}{1+2\ell}\right]=0$ d'où

$\ell \times \dfrac{1}{1+2\ell}=0$ d'où $\boxed{\ell=0}$.

3. **Méthode 2**

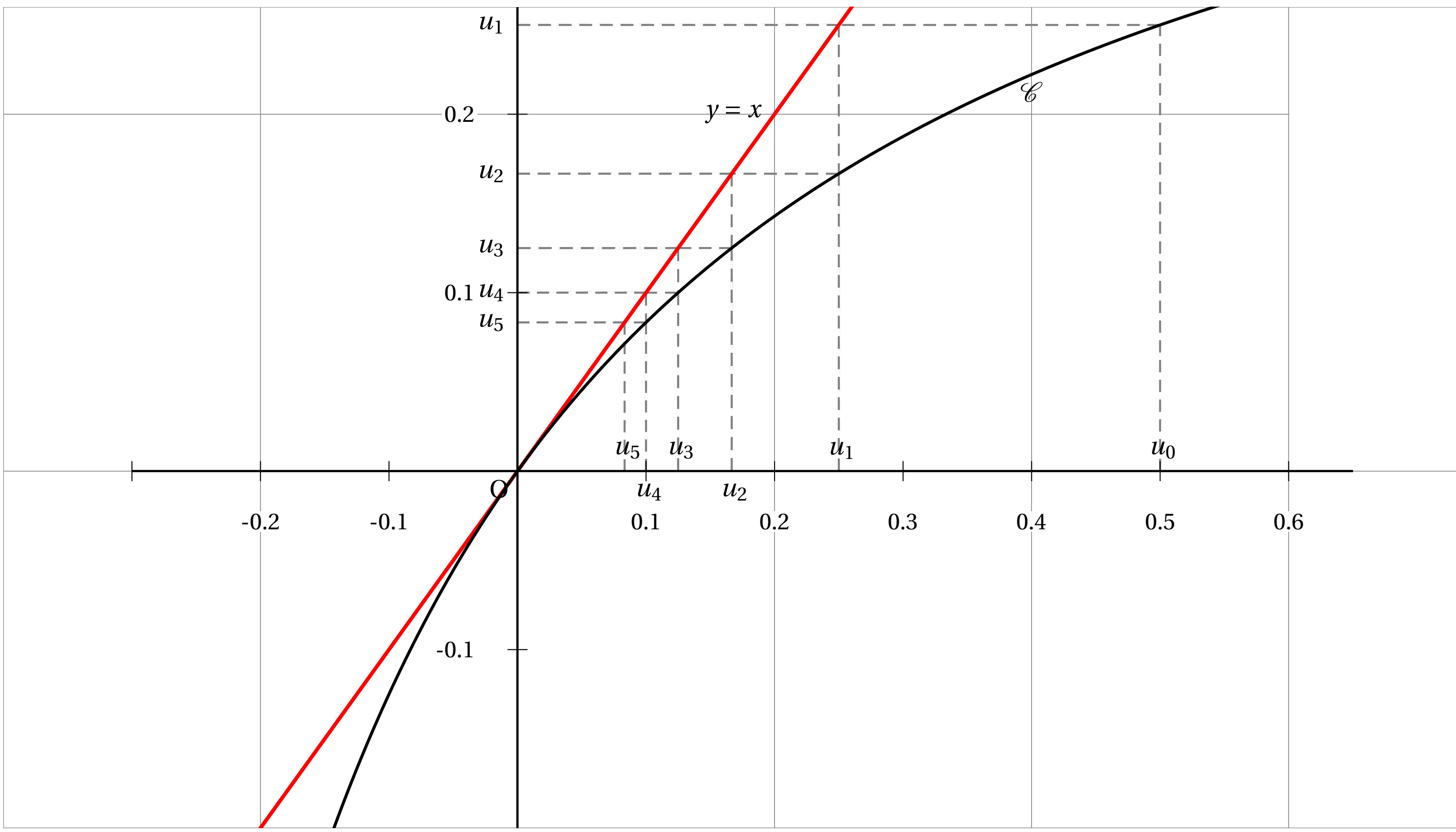
   On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=\dfrac{1}{u_n}+1$.

   (a) Pour tout n, $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}+1=\dfrac{1+2u_n}{u_n}+1$
   $=\dfrac{1}{u_n}+2+1=\left(\dfrac{1}{u_n}+1\right)+2=v_n+2.$
   (v_n) est donc une suite arithmétique, de raison $r=2$ et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{u_0}+1=3$.

   (b) On en déduit que : $\boxed{v_n=2n+3}$.
   $u_n=\dfrac{1}{v_n-1}=\boxed{\dfrac{1}{2n+2}}$.

   (c) On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Graphique représentant les premiers termes de la suite



IV (spécialité)

1. N_2 est premier. N_3 n'est pas premier car divisible par 3. N_4 n'est pas premier car $1\,111 = 11 \times 101$.
2. On sait que pour tout réel $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-2} + x^{p-1} = \dfrac{1 - x^{(p-1)+1}}{1 - x} = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$.
   En particulier, en prenant $x = 10$, on obtient $N_p = \dfrac{10^p - 1}{10 - 1} = \dfrac{10^p - 1}{9}$.
   D'où $10^p - 1 = 9 \times N_p$ avec $N_p \in \mathbb{N}*$. Donc $10^p - 1$ est divisible par 9. (Ou : N_p étant naturel $10^p - 1$ est divisible par 9).
3. Notons [1] l'égalité suivante : $x^n - 1 = (x-1)\left(1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1}\right)$.
   (a) Avec $N_p = N_{2q} = \dfrac{10^{2q} - 1}{9} = \dfrac{100^q - 1}{9}$.
   Or d'après [1] avec $x = 100$ et $n = q$, on a : $100^q - 1 = (100 - 1)\left(1 + 100 + \cdots + 100^{q-2} + 100^{q-1}\right)$
   $= 99 \times \left(1 + 100 + \cdots + 100^{q-2} + 100^{q-1}\right)$.
   Par conséquent $N_p = 11 \times \left(1 + 100 + \cdots + 100^{q-2} + 100^{q-1}\right)$ est divisible par 11.
   Autre méthode : $N_{2q} = (1+10) + \left(10^2 + 10^3\right) + \cdots + \left(10^{2q-1} + 10^{2q}\right) = (1+10) + 10^2(1+10) + \cdots + 10^{2q-1}(1+10) = 11 \times \left(1 + 10^2 + \cdots + 10^{2q-1}\right)$ qui montre que N_{2q} est divisible par 11.
   (b) $N_p = N_{3q} = \dfrac{10^{3q} - 1}{9} = \dfrac{1\,000^q - 1}{9}$.
   Or d'après [1] avec $x = 1\,000$ et $n = q$, on a :
   $1\,000^q - 1 = (1\,000 - 1)\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right) = 9 \times 111 \times \left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$.
   Par conséquent $N_p = 111 \times \left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$ est divisible par 111.
   Autre méthode : On peut faire des paquets de trois termes qui sont multiples de 111
   (c) $N_p = N_{kq} = \dfrac{10^{kq} - 1}{9} = \dfrac{(10k)^q - 1}{9}$.
   Or en appliquant [1] avec $x = 10k$ et $n = q$, on a :
   $(10k)^q - 1 = (10k - 1)\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$.
   Ainsi $N_p = \dfrac{(10k-1)\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)}{9} = \dfrac{10k - 1}{9}\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right) = N_k \times \left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$.
   Or $\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$ est un entier naturel non nul. Finalement N_p est divisible par N_k.
4. Si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier (car N_p est divisible par N_k avec $1 < N_k < N_p$).
   La contraposée de cette implication est : Si N_p est premier, alors p est premier. Autrement dit, pour que N_p soit premier, il faut que p soit premier.
   Cette condition n'est pas suffisante, car 3 est premier, mais N_3 ne l'est pas.