Durée : 4 heures

Correction Baccalauréat S Amérique du Nord 1er juin 2016

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les cancidats

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

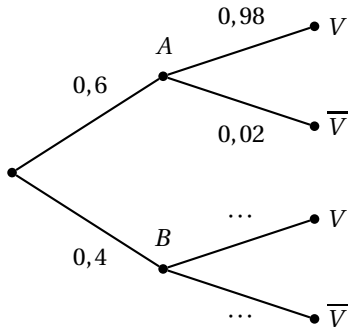
- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

Traduction des hypothèses :

- $p(A) = 0,6$
- $p(V) = 0,96$
- $p_A(V) = 0,98$

Arbre schématisant la situation :



1. $p(V \cap V) = p_A(V) \times p(A) = 0,98 \times 0,6 = \boxed{0,588}$.
2. $V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$ (réunin d'événements incompatibles) donc $p(V) = p(V \cap A) + p(V \cap B)$.
   O en déduit que $p(V \cap B) = p(V) - p(V \cap A) = 0,96 - 0,588 = \boxed{0,372}$.

   Alors : $p_B(V) = \dfrac{p(V\ddot{o}capB)}{p(B)} = \dfrac{0,372}{0,4} = \boxed{0,93}$.
3. $p_{\overline{V}}(B) = \dfrac{p\left(\overline{B} \cap V\right)}{p(B)} = \dfrac{0,4 \times (1 - 0,93)}{1 - 0,96} = \dfrac{0,4 \times 0,07}{0,04} = 10 \times 0,07 = 0,7 = \boxed{70\,\%}$.
   Le technicien a donc raison.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.

   À la calculatrice, on calcule $p(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1)$; on trouve $p(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) \approx 0,93$, qui correspond bien à la probabilité de a partie A.
2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.

   On pose $Z = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$; Z suit la loi normale centrée réduite.

   $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98 \Leftrightarrow P\left(-\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98$.

   On pose ö$alpha = \dfrac{0,1}{\sigma'}$. On en déduit que $P(Z \leqslant \alpha) = 0,01$.

   À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -2,3263$ d'où $\sigma' = \dfrac{-0,1}{\alpha} \approx 0,043$ à 10^{-3} près.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

   a. On a répétition d'expérience identiques indépendantes à deux issues ; X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}\left(40\,;\,\dfrac{1}{5}\right)$.

   Alors : $p(X = 10) = \binom{40}{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^0\left(\dfrac{4}{5}\right)^{30}$ $847\,660\,528 \times \dfrac{4^{30}}{5^{30}}$. On effectue directement le calcul à la calculatrice : on trouve $P(X = 10) \approx\approx \boxed{0,107}$ à 10^{-3} près.

   b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ? On a $n = 40 \geqslant 30$; $np = 40 \times \dfrac{1}{5} = 8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 40 \times \dfrac{4}{5} = 32 \geqslant 5$.

   On peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

   $I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ avec $p = \dfrac{1}{5}$ et $n = 40$.

   $\boxed{I \approx 0,076\ ;\ 0,324}$.

   La fréquence f de billes noires observée est $f = \dfrac{12}{40} = 0,3$; $f \in I$.

   Conclusion : la fréquence observée appartient à l'intervalle I, donc au risque d'erreur de 5 %, ce constat ne remet pas en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2. On appelle désormais n le nombre de billes dans chaque sachet.
Notons Y la variable aléatoire qui compte le nombre de billes noires dans un sachet. Cette variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n\,;\,\dfrac{1}{5}\right)$.

$P(Y=k)=\binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{5}\right)^k\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-k}$.

$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

Donc : $P(Y\geqslant 1)\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^n\leqslant 0,01 \Leftrightarrow n\geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}\approx \boxed{20,64}$.

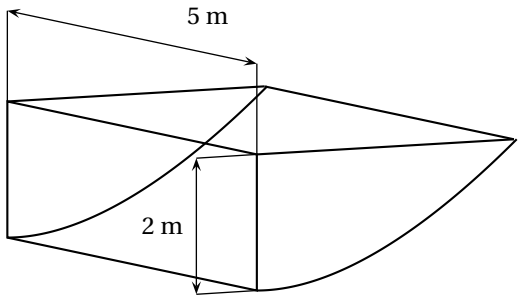
Le nombre minimal de billes que chaque sachet doit contenir pour que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 % est donc de 21 billes.

Exercice 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

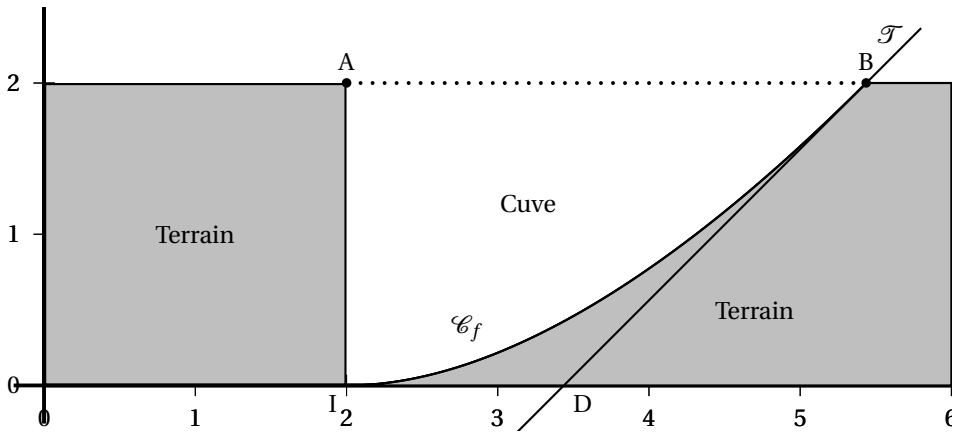
Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2\text{e}]$ définie par :

$$f(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-x+2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. • $f(x_B) = f(2\text{e}) = 2\text{e}\ln(\text{e}) - 2\text{e} + 2 = 2\text{e} - 2\text{e} + 2 = 2 = y_B$ donc $B \in \mathscr{C}$.
$f(x_I) = f(2) = 2\ln(1) - 2 + 2 = 0 = y_I$ donc $I \in \mathscr{C}$.

• f est dérivable sur son ensemble de définition ;
$f'(x) = 1 \times \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + x \times \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} - 1 = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + 1 - 1 = \boxed{\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.
Alors $f'(2) = \ln 1 = 0$ donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.

a. Une équation de $\mathscr{T}$ est $y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$ donc $y = f'(2\text{e})(x - 2\text{e}) + f(2\text{e})$, soit : $y = 1(x - 2\text{e}) + 2$, c'est-à-dire $\boxed{y = x + 2 - 2\text{e}}$.

On a $f(x_D) = 0$ donc $x_D = 2\text{e} - 2$: D a pour coordonnées $\boxed{D(2\text{e} - 2\,;\,0)}$.

b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2\text{e}$.
S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
$\mathscr{A}(AIB) = \dfrac{AI \times AB}{2} = \dfrac{2 \times (2\text{e} - 2)}{2} = 2\text{e} - 2$ u.a..
$\mathscr{A}(AIDB) = \dfrac{(ID + AB) \times AI}{2} = \dfrac{(2\text{e} - 4) + (2\text{e} - 2) \times 2}{2} = 4\text{e} - 6$ u.a.
Encadrement du volume :
On en déduit $\boxed{5(2\text{e} - 2) \leqslant \mathscr{V} \leqslant 5(4\text{e} - 6)}$

3. **a.** Soit G définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4}$.

G st dérivable et $G'(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2} = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$, donc G est bien une primitive de g.

b. $f(x) = g(x) - x + 2 = g(x) - x + 2$.

On en déduit qu'une primitive de f est F avec $F(x) = G(x) - \dfrac{x^2}{2} + 2x$ donc

$G(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^2}{2} + 2x = \boxed{\dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - 3\dfrac{x^2}{4} + 2x}$.

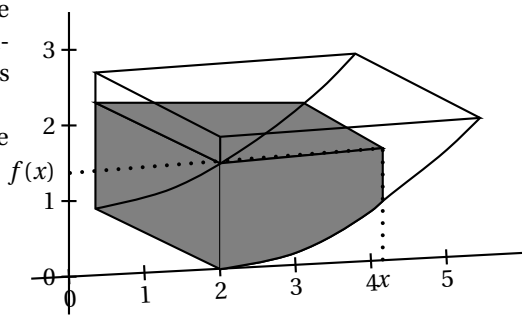
c. L'aire S vaut alors $S = \int_2^{2\text{e}} [2 - f(x)]\ \mathrm{d}x = \int_2^{2\text{e}} 2\ \mathrm{d}x = \int_2^{2\text{e}} f(x)\ \mathrm{d}x = 2(2\text{e}-2) - [F(2\text{e}) - F(2)] = \boxed{\text{e}^2 - 3}$.

On en déduit que le volume $\boxed{\mathscr{V} = 5\left(\text{e}^2 - 3\right)}$

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;\,2\text{e}]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$



1. On a montré précédemment que $f'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$, positif pour $\dfrac{x}{2} \geqslant 1$ donc $x \geqslant 2$. Sur l'intervalle $[2\ ;\ 2\text{e}]$, la fonction f est donc croissante ; f est continue ; $f(2) = 0$ et $f(2\text{e}) = 2$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ a une solution dans l'intervalle $[2\ ;\ 2\text{e}]$, unique puis que f est croissante. Notons α cette solution.
   À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 4,32$.
   Le volume d'eau contenue dans la cuve est alors $v(\alpha) \approx 7\ \text{m}^3$.
2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

   On considère l'algorithme ci-contre.

```
Variables :     a est un réel
                b est un réel
Traitement :    a prend la valeur 2
                b prend la valeur 2 e
                Tant que v(b) − v(a) > 10^−3 faire :
                    c prend la valeur (a + b)/2
                    Si v(c) < V/2, alors :
                        a prend la valeur c
                    Sinon
                        b prend la valeur c
                    Fin Si
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher f(c)
```

   Cet algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve quand celle-ci est remplie à moitié.

Exercice 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

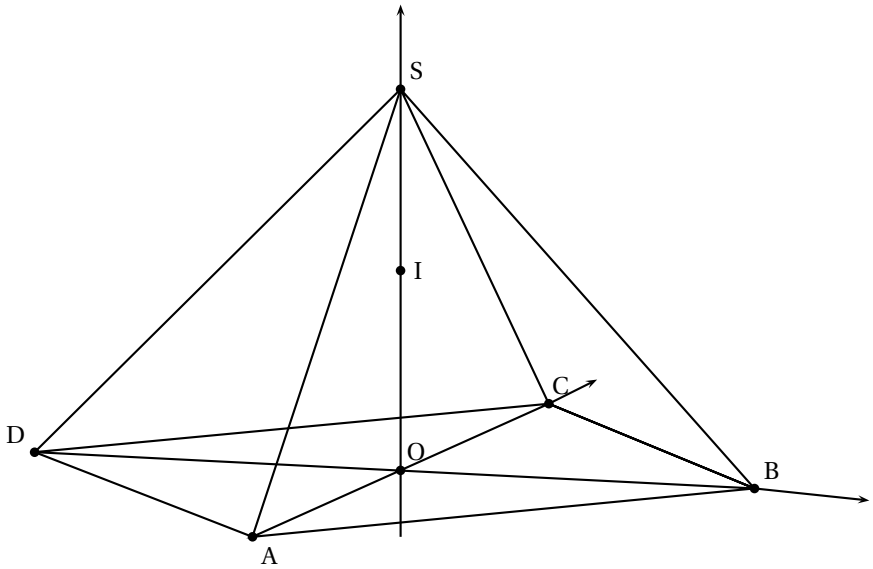
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+\text{i})^n$.

1. $|1+\text{i}| = \sqrt{2}$ donc $1+\text{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \text{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
2. $|z_n| = |(1+\text{i})^n| = |1+\text{i}|^n = \boxed{(\sqrt{2})^n}$.
   $OM_n = |z_n| = (\sqrt{2})^n$.
   Comme $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n + +\infty$.
   On considère le cercle circonscrit au carré ABCD ; ce cercle a pour rayon 4. Puisque OM_n tend vers $+\infty$, il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $OM_n > 4$, donc M_n est extérieur au cercle de centre O et de rayon 4, donc extérieur au carré ABCD.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OS}}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OS}}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{\text{SK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SD}}$ et on note I le milieu du segment [SO].

a. Déterminer les coordonnées du point K.

b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OS}}\right)$.

a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b. Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{\text{AS}}$ et $\overrightarrow{\text{DS}}$ sont coplanaires.

c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. **a.** Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1).$$

b. Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = R_n \times M$.

Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.

3. On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **a.** Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

b. Sachant que $R_0 P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2)$.

Interpréter ces résultats.