# Exercices de bac sur les suites

## I Pondichéry Mercatique avril 2012

Les dépenses annuelles de fonctionnement de deux services d'une entreprise, nommés ici A et B, ont été étudiées sur une assez longue période, ce qui a conduit à la modélisation suivante.

Les dépenses du service A augmentent de 4 000 € chaque année, tandis que celles du service B augmentent de 15 % chaque année.

Cette année (qui sera prise dans la suite comme année 1), les deux services ont effectué des dépenses identiques : 20 000 €.

On note $a_n$ le total des dépenses du service A et $b_n$ le total des dépenses du service B la $n$-ième année. On s'intéresse aussi au cumul de ces dépenses sur plusieurs années. Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille automatisée de calcul, donne les résultats pour les premières années.

| | P | Q | R | S | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Numéro de l'année : $n$ | Dépenses du service A : $a_n$ | Cumul des dépenses du service A | Dépenses du service B : $b_n$ | Cumul des dépenses du service B |
| 2 | 1 | 20 000 | 20 000 | 20 000 | 20 000 |
| 3 | 2 | 24 000 | 44 000 | 23 000 | 43 000 |
| 4 | 3 | 28 000 | 72 000 | 26 450 | 69 450 |
| 5 | 4 | 32 000 | | 30 417,50 | 99 867,50 |
| 6 | 5 | | | | |
| 7 | 6 | | | | |
| 8 | 7 | | | | |
| 9 | 8 | | | | |
| 10 | 9 | | | | |
| 11 | 10 | | | | |

**Partie A : Étude des dépenses du service A**

1. (a) Quelle est la nature et quelle est la raison de la suite $(a_n)$ des dépenses annuelles du service A ?
   (b) Exprimer $a_n$ en fonction de $n$.
   (c) Calculer $a_{10}$.
2. Proposer une formule qui, entrée dans la cellule R3, permet par recopie vers le bas de calculer le cumul des dépenses du service A.
3. Calculer la somme $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_9 + a_{10}$. Que représente cette somme ?

**Partie B : Étude des dépenses du service B**

1. Quelle formule entrée dans la cellule S3 permet par recopie vers le bas de calculer les dépenses annuelles du service B ?
   (a) Quelle est la nature et quelle est la raison de la suite $(b_n)$ des dépenses du service B ?
   (b) Exprimer $b_n$ en fonction de $n$.
2. Calculer les dépenses annuelles prévisibles pour le service B lors de la dixième année. On arrondira le résultat à la centaine d'euros.

**Partie C : Comparaison des deux services**

Lequel des deux services aura le plus dépensé en 10 ans pour son fonctionnement ?

## II Anntilles-Guyane Mercatique juin 2013

Paul a fait un héritage de 150 000 € au début de l'année 2013.

1. On lui propose de placer cette somme sur un compte qui rapporte 4 % par an.

   On note $u_n$ la somme en euros disponible sur ce compte l'année $(2013 + n)$. On a donc $u_0 = 150000$.

   (a) Montrer que $u_1 = 156000$.
   (b) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ? En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   (c) Déterminer l'année à partir de laquelle Paul disposera d'au moins 250 000 €.
2. Pour augmenter plus rapidement son capital, Paul décide d'économiser chaque année 8 000 €, qu'il place en fin d'année sur son compte rémunéré à 4 %.

   Au début de l'année 2014, Paul possèdera donc la somme de :

   $150000 \times 1,04 + 8000 = 164000$ (en euros).

   (a) Montrer que la somme que Paul possède en début d'année 2015 est de 178 560 ?. On note $v_n$ la somme que Paul possède au début de l'année $(2013 + n)$.

   Voici une feuille de calcul qui permet de calculer la somme en euros possédée par Paul à la fin de chaque année :

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Somme sur le compte en début d'année | Intérêt (4 % de la somme sur le compte en début d'année) | Argent économisé pendant l'année | Somme totale sur le compte en fin d'année |
| 2 | 150 000 | 6 000 | 8 000 | 164 000 |
| 3 | 164 000 | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |

   (b) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule B3 pour calculer les intérêts de l'année ?
   (c) Quelles formules doit-on entrer dans les cellules C3 et D3 par recopie vers le bas pour obtenir la somme dont dispose Paul à la fin de chaque année ?
   (d) Déterminer l'année à partir de laquelle Paul pourra disposer de la somme de 250 000 €.

# I Pondichéry Mercatique avril 2012

Les dépenses annuelles de fonctionnement de deux services d'une entreprise, nommés ici A et B, ont été étudiées sur une assez longue période, ce qui a conduit à la modélisation suivante.

Les dépenses du service A augmentent de 4 000 € chaque année, tandis que celles du service B augmentent de 15 % chaque année.

Cette année (qui sera prise dans la suite comme année 1), les deux services ont effectué des dépenses identiques : 20 000 €.

On note $a_n$ le total des dépenses du service A et $b_n$ le total des dépenses du service B la $n$-ième année. On s'intéresse aussi au cumul de ces dépenses sur plusieurs années. Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille automatisée de calcul, donne les résultats pour les premières années. Le tableau est complété en bleu.

| | P | Q | R | S | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Numéro de l'année : $n$ | Dépenses du service A : $a_n$ | Cumul des dépenses du service A | Dépenses du service B : $b_n$ | Cumul des dépenses du service B |
| 2 | 1 | 20 000 | 20 000 | 20 000 | 20 000 |
| 3 | 2 | 24 000 | 44 000 | 23 000 | 43 000 |
| 4 | 3 | 28 000 | 72 000 | 26 450 | 69 450 |
| 5 | 4 | 32 000 | 104 000 | 30 417,50 | 99 867,50 |
| 6 | 5 | 36 000 | 140 000 | 34 980,13 | 134 847,63 |
| 7 | 6 | 40 000 | 180 000 | 40 227,14 | 175 074,77 |
| 8 | 7 | 44 000 | 224 000 | 46 261,22 | 221 335,98 |
| 9 | 8 | 48 000 | 272 000 | 53 200,40 | 274 536,38 |
| 10 | 9 | 52 000 | 324 000 | 61 180,46 | 335 716,84 |
| 11 | 10 | 56 000 | 380 000 | 70 357,53 | 406 074,36 |

**Partie A : Ëtude des dépenses du service A**

1. (a) La suite $(a_n)$ des dépenses annuelles du service A est une suite arithmétique car les dépenses augmentent d'une somme constante chaque année. Sa raison est 4 000 et son premier terme 20 000.

   (b) Exprimons $a_n$ en fonction de $n$. Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme $u_1$ et de raison $r$ est $u_n = u_1 + (n-1)r$. Par conséquent $a_n = 20\,000 + (n-1) \times 4\,000$.

   (c) Calculons $a_{10}$. $a_{10} = 20\,000 + 9 \times 4\,000 = 56\,000$.

2. Une formule qui, entrée dans la cellule R3, permet par recopie vers le bas de calculer le cumul des dépenses du service A est =R2+Q3. (On peut mettre $ devant les lettres.)

3. Calculons la somme $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}$.
   La somme des termes d'une suite arihmétique est $S_n =$ nombre de termes $\times$ la demi-somme des termes extrèmes
   $S_{10} = \dfrac{10 \times (a_1 + a_{10})}{2} = \dfrac{10 \times (20\,000 + 56\,000)}{2} = 380\,000$.
   Cette somme représente le montant des dépenses cumulées du service A.

**Partie B : Ëtude des dépenses du service B**

1. La formule entrée dans la cellule S3 qui permet par recopie vers le bas de calculer les dépenses annuelles du service B est =S2*1,15. (On peut ausi écrire, =$S2*1,15)

   (a) Si une grandeur subit une évolution au taux $t$, le coefficient multiplicateur asocié est $(1+t)$. Nous avons donc ici un coeficient multiplicateur égal à 1,15. Passant d'un terme au suivant en le multipliant par un mÍme nombre, la suite $(b_n)$ des dépenses du service B est une suite géométrique de raison 1,15 et de premier terme 20 000.

   (b) Le terme général $u_n$ d'une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_1$ est $u_n = u_1 q^{n-1}$. $b_n = (2\,000(1.15)^{n-1}$.

2. Les dépenses annuelles prévisibles pour le service B lors de la dixième année s'élèvent à $b_{10}$.
   $b_{10} = 20\,000 \times (1{,}15)^9 \approx 70\,400$.

**Partie C : Comparaison des deux services**

Pour déterminer lequel des deux services aura le plus dépensé en 10 ans pour son fonctionnement, calculons d'abord $b_1 + b_2 + \cdots + b_9 + b_{10}$.

La somme $S_n$ des $n$ premiers termes d'une suite géométrique est $u_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. Appliquons $S_{10} = 20\,000 \dfrac{1{,}15^{10} - 1}{1{,}15 - 1} \approx 406\,074$.

Par conséquent, le service B aura dépensé davantage en dix ans pour son fonctionnement.(406 074>380 000).

## II Anntilles-Guyane Mercatique juin 2013

1. (a) Le coefficient multiplicateur est $1+\dfrac{4}{100}=1,04$.
   On en déduit $u_1=u_0\times 1,04=150\,000\times 1,04=\boxed{156\,000}$.

   (b) Pour tout $n$, on a $u_{n+1}=1,04u_n$ ; la suite $(u_n)$ est **géométrique**, de raison $q=1,04$ et de premier terme $u_0=150\,000$.
   On en déduit : $u_n=u_0q^n$ donc $\boxed{u_n=150\,000\times 1,04^n}$.

   (c) On veut $u_n\geqslant 250\,000$ donc $150\,000\times 1,04^n\geqslant 250\,000$
   donc $1,04^n\geqslant \dfrac{250\,000}{150\,000}=\dfrac{5}{3}$.
   On en déduit $\ln\left(1,04^n\right)\geqslant \ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$, d'où $n\geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1,04)}\approx 13,02$.
   Comme $n$ est entier, il faut que $\boxed{n\geqslant 14}$.
   Paul disposera donc d'au moins 250 000 € dans 14 ans, soit en **2027**.

2. (a) En 2015, Paul possèdera $164000\times 1,04+8\,000=\boxed{178\,560\text{ €}}$.

   (b) Dans la cellule B3, il faut taper « **=A3*4/100** ».

   (c) En D3, on tape « =D2 »ou « **=8000** ».
   En E3, on tape « **=A3+B3+C3** »ou « **=SOMME(A3 :C3)** ».

   (d) En complétant le tableau, on obtient :

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Somme sur le compte en début d'année | Intérêt (4 % de la somme sur le compte en début d'année) | Argent économisé pendant l'année | Somme totale sur le compte en fin d'année |
| 2 | 150 000 | 6 000 | 8 000 | 164 000 |
| 3 | 150 000 | 6 000 | 8 000 | 164 000 |
| 4 | 164 000 | 6 560 | 8 000 | 178 560 |
| 5 | 178 560 | 7 142 | 8000 | 193 702 |
| 6 | 193 702 | 7 748 | 8000 | 209 450 |
| 7 | 209 450 | 8 378 | 8000 | 225 829 |
| 8 | 225 829 | 9 033 | 8000 | 242 862 |
| 9 | 242 862 | 9 714 | 8000 | 260 576 |

   C'est en **2020** que Paul possédera au moins 250 000 €sur son compte.

   **Autre façon** : on pose considère la suite définie par $v_0=150\,000$ et
   $v_{n+1}=1,04v_n+8\,000$ et on calcule les termes à la calculatrice.