Taux d'évolution

Table des matières

Activités préparatoires

Activité 1 pages 7 et 8

y_1	y_2	Évolution de y_1 à y_2	Variation absolue de y_1 à y_2	Taux d'évolution de y_1 à y_2
8	8,96	hausse	0,96	$\frac{0,96}{8} = 0,12 = 12\ \%$
155	124	baisse	-31	$-\frac{31}{155} = -0,20 = -20\ \%$
120	124,5	hausse	4,5	$\frac{4,5}{120} = 0,0375 = 3,75\ \%$
470	418,3	baisse	$-51,7$	$-\frac{51,7}{470} = -0,11 = -11\ \%$

Taux d'évolution de y_1 à y_2	Évolution de y_1 à y_2	Coefficient multiplicateur
340 %	Hausse	$1 + \frac{340}{100} = 4,4$
-50 %	Baisse	$1 - \frac{50}{100} = 0,5$
$1,58 - 1 = 0,58 = 58\ \%$ %	Hausse	1,58
$0,41 - 1 = -0,59 = -59\ \%$ %	Baisse	0,41

y_1	Taux d'évolution de y_1 à y_2	y_2
24	10 %	26,4
80	-25 %	60
4,5	100 %	9
300	-15 %	255

Évolution de y_1 à y_2	Évolution de y_2 à y_3	Évolution globale de y_1 à y_3
Hausse de 4 %	Hausse de 6 %	Hausse de $10,24$ %$(1,04 \times 1,06 = 1,1024)$
Hausse de 22 %	Baisse de 35 %	Baisse de $20,7\%((1+0,22)\times(1-0,35) = -0,207)$
Baisse de 20 %	Hausse de 20 %	Baisse de $4\%((1-0,2)\times(1+0,2) = -0,04)$
Baisse de 10 %	Hausse de 5 %	Baisse de $5,5$ %
Baisse de 60 %	Baisse de 30 %	Baisse de 72 %

Évolution de y_1 à y_2	Évolution réciproque de y_2 à y_1
Hausse de 2 %	$\dfrac{1}{1+0,02} - 1 \approx -0,0196$ d'o˘ baisse d'environ $1,96$ %
Baisse de 54 %	Hausse d'environ $117,39$ %

I Rappels sur les taux d'évolution, coefficient multiplicateur

I.1 Coefficient multiplicateur :

Propriété

Un nombre, auquel on fait subir une évolution avec un taux t, est multiplié par le nombre $C = 1 + t$, appelé coefficient multiplicateur.

Justification :

Soit x le nombre de départ ; l'évolution est $x \times t$; la nouvelle valeur est donc $x + xt = x \times (1+t)$ en mettant x en facteur.

I.2 Exemples :

- Un objet vaut 12 €. Son prix augmente de 4 %. Son nouveau prix est $12 \times \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) = 12 \times 1,04 = 12,48$ €.
- La population d'une ville était de 52000 habitants ; elle a diminué de 3 % en un an. Elle est alors égale à : $52000 \times \left(1 - \dfrac{3}{100}\right) = 52000 \times 0,97 = 50440$
- Le population d'un pays a été multiplié par 1,012 en un an. Le taux d'augmentation en % est t tel que $1,02 = 1 + \dfrac{t}{100}$ donc $t = (1,02-1)\times 100 = 2$.
  La population a augmenté de 2%.
- Lors d'une crise économique, un pays subit beaucoup d'inflation et les prix sont multipliés par 3 en un an. $3 = 1 + \dfrac{t}{100}$ donc $t = 200$: **Les prix ont augmenté de 200 %.**

Activité 2 page 9

1. $y_1 = 250$ et $y_2 = 280$.
   (a) Variation absolue : 30 €
   (b) Taux d'évolution t_1 : $t_1 = \dfrac{30}{250} = 0,12$. Le prix a augmenté de 12 %.
   (c) Le coefficient multiplicateur correspondant est : $1 + 0,12 = 1,12$.
2. En 2006, le prix a diminué de 2,5 %.
   (a) Le coefficient multiplicateur correspondant à cette évolution est $1 - \dfrac{2,5}{100} = 1 - 0,025 = 0,975$.

(b) $y_3 = 280 \times 0,975 = 273$

3. Soit T le taux dévolution global :

   (a) On a : $1+T = (1+t_1) \times (1+t_2) = 1,12 \times 0,975 = 1,092$.

   (b) On en déduit que $T = 0,092$.
   De 2001 à 2006, le prix du produit a augmenté de 9,2 %.

II Évolutions successives

II.1 Taux global

Propriété

Soient x_0, x_1, $\dots x_n$ des nombres réels strictement positifs.
t_1, t_2, $\dots x_n$ sont les taux d'évolution successifs permettant de passer de x_1 à x_2, de x_2 à x_3, ..., de x_{n-1} à x_n.
Le coefficient multiplicateur global permettant de passer de y_0 à y_n est le produit des n coefficients.
$1+T = (1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$ donc :
$\boxed{T = (1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n) - 1}$

II.2 Exemples

- **Exemple 1 :** Un prix subit une augmentation de 2 %, suivie d'une augmentation de 3 %.
  Quel est le taux d'augmentation global ?

  Réponse : Le premier coefficient multiplicateur est $1+t_1 = 1+2\% = 1,02$.
  Le second est $1+t_2 = 1+3\% = 1,03$.
  Le coefficient multiplicateur global est $1,02 \times 1,03 = 1,0506$.
  Si t est le taux global, on a : $1+t = 1,0506$ donc $t = 1,0506 - 1 = 0,0506 = \boxed{5,06\%}$.

- **Exemple 2 :** Un prix subit une augmentation de 2 %, suivie d'une baisse de 2 %.
  Quel est le taux d'augmentation global ?

  Réponse : Le premier coefficient multiplicateur est $1+t_1 = 1+2\% = 1,02$.
  Le second est $1+t_2 = 1+(-2\%) = 1-0,02 = 0,98$.
  Le coefficient multiplicateur global est $1,02 \times 0,98 = 0,9996$.
  Si t est le taux global, on a : $1+t = 0,9996$ donc $t = 0,9996 - 1 = -0,0004 = \boxed{-0,04\%}$.

- **Exemple 3 :** La popualtion d'une ville augmente de 3 % par an pendant trois ans ? Quel est le taux dévolution global ?

  Réponse :
  Soit $t = 3\%$. Le coefficient multiplicateur correspondant à chaque année est $1+3\% = 1,03$. La population est donc multipliée par 1,03 chaque année.
  Au bout de trois ans, la population a été multipliée par le coefficient multiplicateur
  $C = (1+t) \times (1+t) \times (1+t) = 1,03 \times 1,03 \times 1,03 = 1,03^3 = 1,092727$.
  Si T est le taux d'évolution global, on a : $C = 1+T = 1+0,092727$ donc $T = C - 1 = 0,092727 = \boxed{9,2727\%}$.

  Exercices :

Activité 3 page 10

II.3 Taux d'évolution moyen

On considère n évolutions successives **de même taux t**, appelé taux moyen, qui permettent de passer de y_0 à y_n.
Par conséquent : $1+T=(1+t)\times(1+t)\times\cdots(1+t)=(1+t)^n$.
On en déduit : $1+t=(1+T)^{\frac{1}{n}}$ donc $\boxed{t=(1+T)^{\frac{1}{n}}-1}$.

Si les taux sont différents, on a : $1+t=[(1+t_1)\times(1+t_2)\cdots(1+t_n)]^{\frac{1}{n}}$ donc $\boxed{t=[(1+t_1)\times(1+t_2)\cdots(1+t_n)]^{\frac{1}{n}}-1}$

III Taux d'évolution réciproque

Définition

Soit t un taux d'évolution, qui permet de passer d'un nombre x à un nombre y.
On appelle taux d'évolution réciproque le taux t' qui permet de revenir au nombre x initial, c'est-à ;-dire le taux qu'il faut appliquer à y pour retrouver x.

On a alors $(1+T)(1+T')=1$ donc $1+T'=\dfrac{1}{1+T}$ et $\boxed{T'=\dfrac{1}{1+T}-1}$.

Exemple :

Un prix de 40 € subit une hausse de 2% ; le taux d'évolution est donc $t=2\,\%$. Le coefficient multiplicateur est $C=1+t=1+\dfrac{2}{100}=1,02$.
Le nouveau prix est $40\times1,02=40,8$.
Le taux réciproque de t est le taux d'évolution t' qu'il faut appliquer à 40,8 pour retrouver le prix initial 40.
On doit avoir $40,8\times[1+t']=40$, donc $(40(1+t))\times(1+t')=40$, d'où $(1+t)\times(1+t')=1$.
On obtient successivement $1+t'=\dfrac{1}{1+t}$ donc $t'=\dfrac{1}{1+t}-1$; ici, $t'=\dfrac{1}{1,02}-1\approx-0,0196$, soit $t'\approx-1,06\,\%$.
Après une hausse de 2 %, il faut appliquer une baisse d'environ 1,06 % pour retrouver le nombre initial.