Fonction dérivée

Table des matières

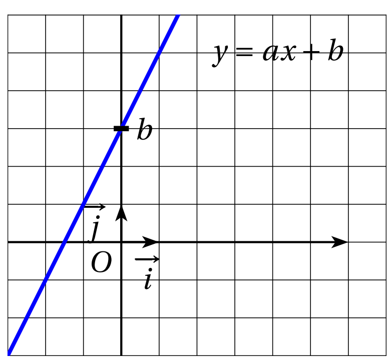
I Rappels sur les équations de droites

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormal.
Soit $\mathscr{D}$ une droite.

Deux cas sont possibles :

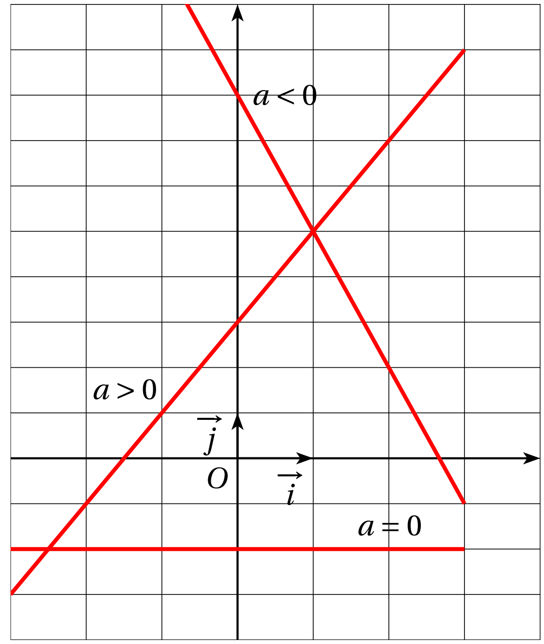
- $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées : tous les points de $\mathscr{D}$ ont la même abscisse k.
  On dit alors que l'équation de $\mathscr{D}$ est : $\boxed{x = k}$
- $\mathscr{D}$ est sécante à l'axe des ordonnées.
  Les coordonnées $(x\,;\,y)$ des point de $\mathscr{D}$ sont liées par une relation de la forme $y = ax + b$.
  a et b sont caractéristiques de $\mathscr{D}$:
  * b est appelé **l'ordonnée à l'origine** de $\mathscr{D}$.
  * a est le **coefficient directeur** de $\mathscr{D}$.

b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.



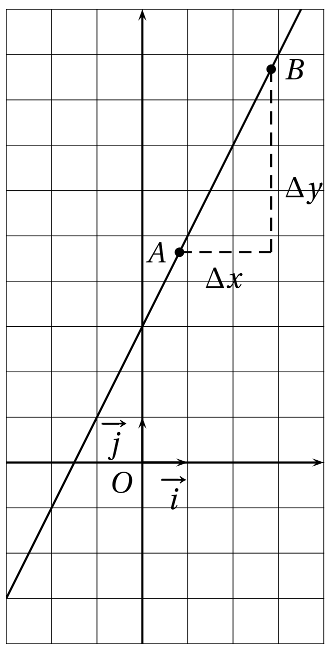
a mesure l'inclinaison de la droite. (Si α est l'angle que fait la droite par rapport à l'horizontale, on a : $a = \tan(\alpha)$)

- Si $a > 0$, la fonction affine associée à la droite est croissante.
- Si $a = 0$, la fonction affine associée à la droite est constante et la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
- Si $a < 0$, la fonction affine associée à la droite est décroissante.



Plus précisément :

Interprétation graphique du coefficient directeur :

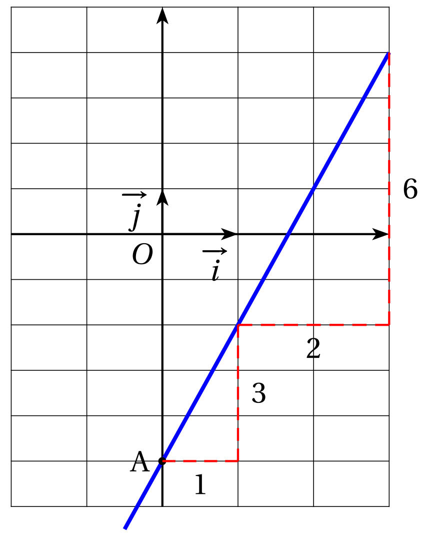


$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Comment utiliser le coefficient directeur pour tracer une droite ?

Exemple : Tracer la droite d'équation $y = 3x - 5$.
Pour $x = 0$, on a $y = 3 \times 0 - 5 = -5$ donc cette droite passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,-5)$.
Son coefficient directeur est $a = 3$.
Nous avons vu que le coefficient directeur pouvait s'écrire $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
Par conséquent : $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta y = a \times \Delta x$.
Ici : $a = 3 = \dfrac{3}{1}$

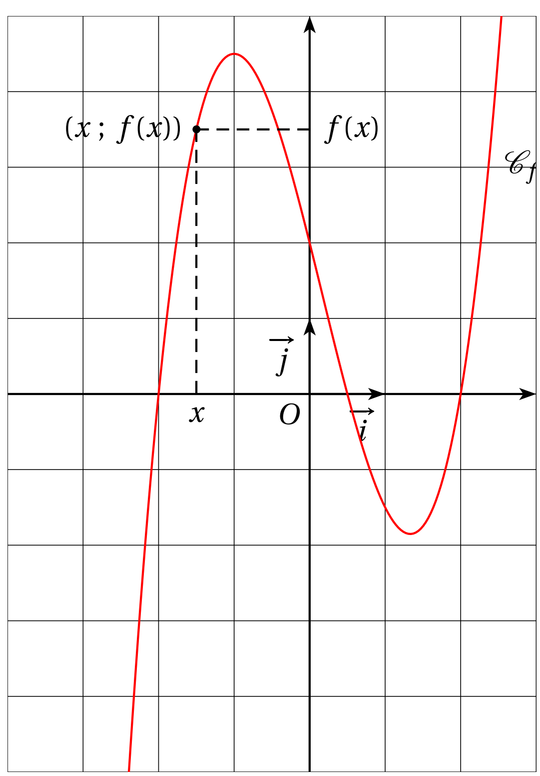
Si l'on **choisit** de prendre $\Delta x = 1$, alors $\Delta y = 3$. Par conséquent, en partant de A, l'on se déplace de 1 unité en abscisses et de 3 unités en ordonnées.



Si a est le coefficient directeur, on a : $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta y = a \times \Delta x$; en choisissant une valeur pour Δx, on calcule la valeur correspondante pour Δy.
Si, au lieu de prendre $\Delta x = 1$, on avait pris $\Delta y = 2$, on aurait trouvé $\Delta y = 3 \times 2 = 6$; en partant de n'importe quel point de la droite (A ou un autre), si l'on se déplace de 2 unités parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace dans le même temps de 6 unités parallèlement à l'axe des ordonnées.

II Rappels sur les courbes représentatives d'une fonction

Si f est une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est l'ensemble des points de coordonnées $\left(x\ ;\ f(x)\right)$.



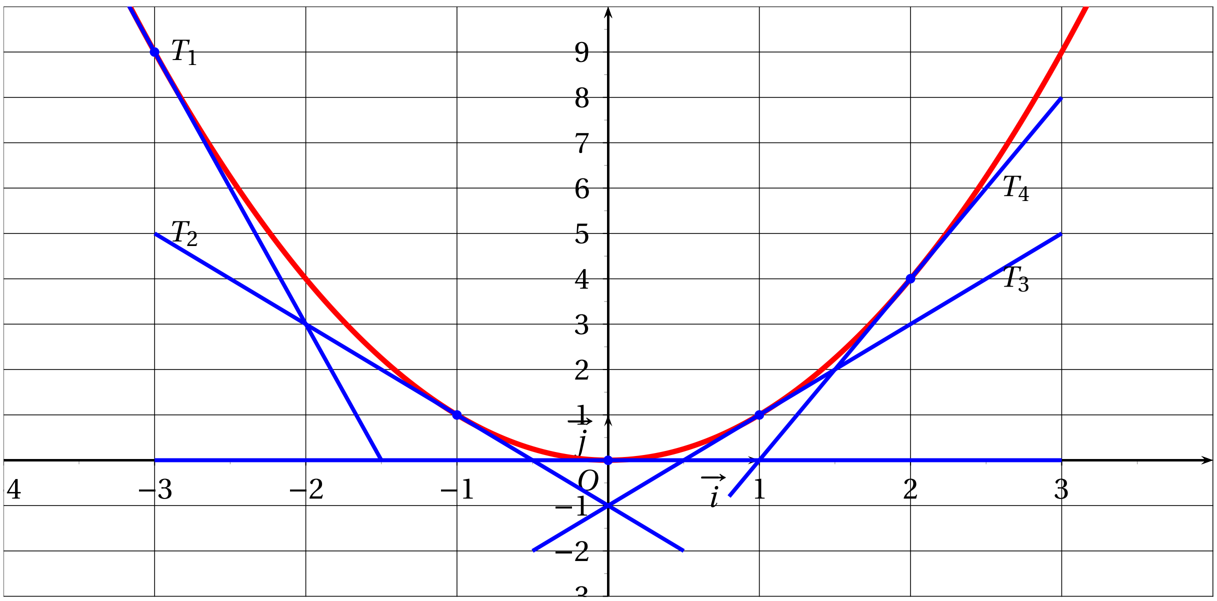
III Nombre dérivé d'une fonction et fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
Si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, on note $\mathbf{f'(a)}$, **nombre dérivé de f** en a, le **coefficient directeur** de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point.

Exemple : Activité 2 page 120

Soit la courbe représentative de f définie par $f(x) = x^2$



1. On trouve graphiquement $f'(-3) = -6$, $f'(-1) = -2$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$ et $f'(2) = 4$.
   En effet, T_1 passe par les points de coordonnées $(-3\,;\,9)$ et $(-2\,;\,3)$, donc $f'(-3) = \dfrac{3-9}{-2-(-3)} = -6$.
   T_2 passe par les ponts de coordonnées $(-2\,;\,3)$ et $(-1\,;\,1)$ donc $f'(-1) = \dfrac{1-3}{-1-(-2)} = -2$.
   (xx') a un coefficient directeur nul.
   T_3 passe par les points de coordonnées $(1\,;\,1)$ et $(2\,;\,3)$ donc $f'(1) = \dfrac{3-1}{2-1} = 2$.
   T_4 passe par les points de coordonnées $(2\,;\,4)$ et $(1\,;\,0)$ donc $f'(2) = \dfrac{0-4}{1-2} = \dfrac{-4}{-1} = 4$.
2. Pour x_A réel, on peut conjecturer que $f'(x_A) = 2x_A$.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f', qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est défini sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f'(x) = 2x}$

IV Dérivée de fonctions usuelles

Définition

Si une fonction f définie sur un intervalle I admet en tout point de I un nombre dérivé (donc si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en ce point), on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui, à tout réel x, associe le nombre dérivé $f'(x)$, est appelé e fonction dérivée de f ; on la note f'.

Voici le tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles (à savoir par cœur).

$f(x) =$	$f'(x) =$
$k,\ k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n $(n \in \mathbb{N}\ n > 1)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x} (x \neq 0)$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}\ n > 1,\ x \neq 0)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$ $(x > 0)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples :

1. $f(x) = x^5$; $f(x) = x^n$ avec $n = 5$; $f'(x) = nx^{n-1} = 5x^4$
2. $f(x) = x^6$; $f(x) = x^n$ avec $n = 6$ donc $f'(x) = nx^{n-1} = 6x^5$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
   $f(x) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^n}$ avec $n = 2$ donc $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{2}{x^3}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^7} = \frac{1}{x^n}$ avec $n = 7$; $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{7}{x^8}$

V Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k une constante.
Alors, on a les formules suivantes :

Addition :	$(\mathbf{u}+\mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
Soustraction :	$(\mathbf{u}-\mathbf{v})' = \mathbf{u}' - \mathbf{v}'$
Multiplication par une constante :	$(\mathbf{ku})' = \mathbf{ku}'$
Produit de deux fonctions :	$(\mathbf{uv})' = \mathbf{u}'\mathbf{v} + \mathbf{uv}'$
Inverse d'une fonction :	$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{u}}\right)' = -\frac{\mathbf{u}'}{\mathbf{u}^2}$ $(v(x) \neq 0\ \text{ sur } I)$
Quotient de deux fonctions :	$\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)' = \frac{\mathbf{u}'\mathbf{v} - \mathbf{uv}'}{\mathbf{v}^2}$ $(v(x) \neq 0\ \text{ sur } I)$

Exemples :

1. $f(x) = 3x^2$; on peut voir cela comme $f(x) = kg$ avec $k = 3$ et $g(x) = x^2$; $f' = (kg)' = kg'$ donc $f' = 3g'$ avec $g'(x) = 2x$ d'o˘ $\boxed{f'(x) = 3 \times 2x = 6x}$.
2. $f(x) = 5x^7$; on a de même : $f'(x) = 5 \times 7x^6 = 35x^6$. $\boxed{f'(x) = 35x^6}$
3. $f(x) = x^5 + x^2$; $f = u + v$ avec $u(x) = x^5$ et $v(x) = x^2$ donc $f' = (u+v)' = u' + v'$ avec $u'(x) = 5x^4$ et $v'(x) = 2x$. Par conséquent : $\boxed{f'(x) = 5x^4 + 2x}$.

4. $f(x)=(2x+3)\sqrt{x}$; on peut voir f comme : $f=uv$ avec $u(x)=2x+3$ et $v(x)=\sqrt{x}$.
   $f'=(uv)'=u'v+uv'$ avec $u'(x)=2$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   Par conséquent :
   $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=2\sqrt{x}+(2x+3)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}\times2\sqrt{x}+(2x+3)}{2\sqrt{x}}=\dfrac{6x+3}{2\sqrt{x}}=$
   $\boxed{\dfrac{3(2x+1)}{2\sqrt{x}}}$
5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. $f=\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=x^2+x+1$ d'o˘ $f'=\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x)=2x+1$.
   Par conséquent : $\boxed{f'(x)=-\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}}$
6. $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x+1}$; $f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=3x+2$ et $v(x)=2x+1$.
   $f'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=3$ et $v'(x)=2$.
   Alors : $f'(x)=\dfrac{3(2x+1)-2(3x+2)}{(2x+1)^2}=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}}$

VI Composée de deux fonctions

Définition

Soient f et g deux fonctions.
On appelle composée de f suivie de g la fonction $x\mapsto f(g(x))$.

Exemples :

Exemple 1 : Soit $u(x)=(x+3)^2$; $u(x)=f(g(x))$ avec $g(x)=x+3$ et $f(x)=x^3$

Exemple 2 : Soit $u(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+7}$; $u(x)=f(g(x))$ avec $g(x)=x^2+5x+7$ et $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

VII Applications de la dérivation

VII.1 Variations d'une fonction :

Théorème

Soit f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x)\geqslant 0$ sur I, alors f est croisante sur I.
- Si $f'(x)\leqslant 0$ sur I, alors f est décroisante sur I.
- Si $f'(x)=0$ sur I, alors f est constante sur I.

Pour étudier les variations d'une fonction, on est donc amené à étudier le signe de la dérivée de cette fonction.

Exemples :

1. …tudier les variations de $f : x\longmapsto x^2+3x+5$.
   f est définie sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x)=2x+3$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{2}{3}$ et $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{3}{2}$.

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{11}{4}$	↘	

2. …tudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{5x+4}$ définie sur $\mathscr{D} = \left[-10\,;\,-\dfrac{4}{5}\right[\cup \left]-\dfrac{4}{5}\,;\,10\right[$.

   $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = 5x+4$.

   $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 5$.

   Par conséquent : $f'(x) = \dfrac{2(5x+4) - 5(2x+3)}{(5x+4)^2} = \dfrac{-7}{(5x+4)^2}$.

   Pour tout x de $\mathscr{D}$, $(5x+4)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de -7, donc négatif.

   On en déduit le tableau de variations :

x	-10		$-\frac{5}{4}$		10
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{17}{46}$	↘	‖	↘	$\frac{23}{54}$

3. …tudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 15x^2 + 36x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

   $f'(x) = 6x^2 + 30x + 36 = 6(x^2 + 5x + 6)$.

   $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 5x + 6$.

   …tude du signe : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$.

   L'expression a deux racines : $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{1}}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{1}}{2} = -2$.

   Un trinÙme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et du signe de $-a$ entre les racines.

   $x^2 + 5x + 6$ est donc positif sur $]-\infty\,;\,-3]$ et sur $[-2\,;\,+\infty[$ et négatif sur $[-3\,;\,2]$.

   On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-26	↘	-27	↗	

VII.2 Grandeur marginale

Activité 3 page 134

Une entreprise fabrique un produit P. Le coût de production est donné quotidiennement par

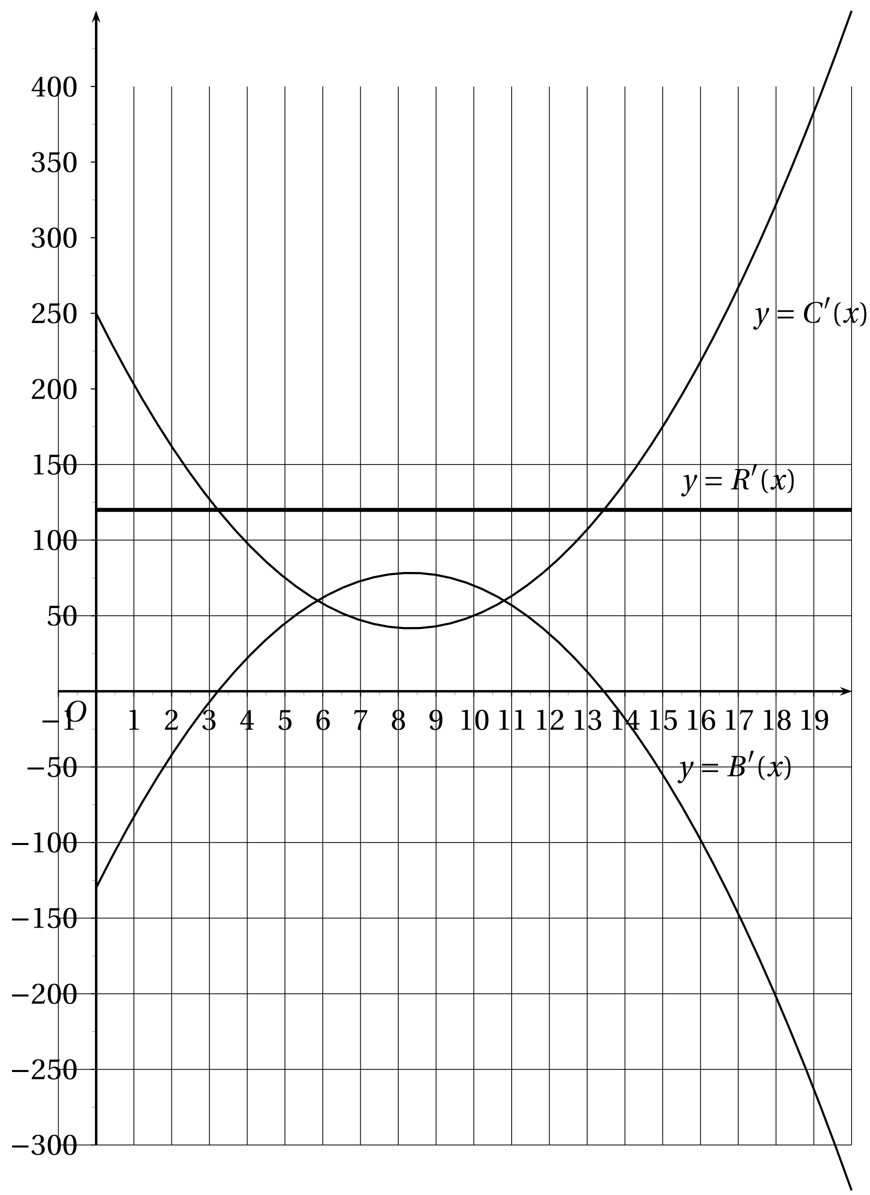
$$C(x) = x^3 - 25x^2 + 250.$$

La recette est $R(x) = 120x$.

1. Le bénéfice est : $B(x) = R(x) - C(x) = 120x - (x^3 - 25x^2 + 250x) = -x^3 + 25x^2 - 130x$
2. $C'(x) = 3x^2 - 50x + 250$
   $R'(x) = 120$
   $B'(x) = -3x^2 + 50x - 130.$
3. Le coût marginal est le **supplément** de dépense qu'une entreprise dpit consentir pour fabriquer une unité supplémentaire de son produit ; ce coût supplémentaire vaut $\dfrac{C(x+1) - C(x)}{1} = \dfrac{C(x+1) - C(x)}{(x+1) - x}$
4.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$C'(x)$	250	162	95	158	42	50	82	138	218	322	450
$B'(x)$	-150	-42	22	62	78	70	38	-18	-98	-202	-330

5. Courbes



L'entreprise a intérêt à augmenter sa production pour $x \in [4\ ;\ 13]$

Définition

La grandeur marginale correspondant à une fonction f pour le nombre x est $f(x+1)-f(x)$ que l'on peut voir comme $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$.

Ce nombre est presque égal à $f'(x)$ donc on confond souvent la grandeur marginale avec la dérivée.