

# Résumé du cours sur la fonction exponentielle

## I Définition

### Définition

La fonction exponentielle, notée  $\exp$ , est l'unique fonction dérivable  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant les deux conditions suivantes :

- $f' = f$
- $f(0) = 1$

L'existence est **admise**.

### Démonstration de l'unicité :

- on admet que cette fonction ne s'annule pas (on pourra le montrer à l'issue du chapitre sur les compléments de la dérivation)
- On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe une autre fonction  $g$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $g' = g$  et  $g(0) = 1$ .

On pose  $h = \frac{f}{g}$ .

$h$  est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.

$$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0 \text{ (car } f' = f \text{ et } g' = g\text{)}.$$

On en déduit que  $h$  est constante.

$$h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1, \text{ donc, pour tout } x, h(x) = 1 \text{ d'où } f(x) = g(x).$$

Cela montre l'unicité de la fonction  $f$ .

Cette fonction est appelée exponentielle et on la note  $\exp$ .

## II Étude de la fonction exponentielle :

**Remarque** : on a admis que l'exponentielle ne s'annulait pas ; comme  $\exp(0) = 1 > 0$ , on en déduit que  $\exp$  est toujours positive :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\exp(x) > 0}$$

### II.1 Sens de variation :

#### Propriété

| La fonction exponentielle est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration** : La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\exp' = \exp$ , donc pour tout réel  $x$ ,  $\exp'(x) > 0$  puisque  $\exp(x) > 0$ . La fonction  $\exp$  est donc croissante.

## II.2 Limites à l'infini



### Théorème

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

**Démonstration :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \exp(x) - x$ .  $f$  est dérivable et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \exp'(x) - 1 = \exp(x) - 1$ .  $\exp$  est croissante et  $\exp(0) = 1$ , donc, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) \geq 0$ . On en déduit que  $f$  est croissante et comme  $f(0) = \exp(0) - 0 = \exp(0) = 1 > 0$  donc  $f(x) > 0$ . Par conséquent :  $f(x) > 0$  donc  $\exp(x) > x$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , donc, d'après un théorème de comparaison (voir un chapitre ultérieur),  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ .

( $\exp(x)$  est supérieur à un terme qui tend vers  $+\infty$ , donc tend aussi vers  $+\infty$ )

On peut montrer que, pour tout  $x$ ,  $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$  donc  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ . En posant  $X = -x$ , donc  $x = -X$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \exp(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(X)} = 0$ .

### Conséquences :

1. Pour tout  $a > 0$ ,  $\exp(a) > 0$
2. Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $\exp a = \exp b \Leftrightarrow a = b$ .
3. Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $\exp a < \exp b \Leftrightarrow a < b$ .

## III Propriétés algébriques

### III.1 Exponentielle de l'opposé d'un réel :



### Propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

**Démonstration :** On peut montrer (dans un chapitre ultérieur) que  $\exp(x) \times \exp(-x)$  est une constante donc  $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$  (en remplaçant  $x$  par 0) donc  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ .

### III.2 Exponentielle de la somme de deux réels :



### Propriété (admise)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

### III.3 Exponentielle de la différence de deux réels :



#### Propriété

Pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$

**Démonstration :**  $\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

**Exemple :** Pour tout réel  $x$ ,  $\frac{\exp(2x + 3)}{\exp(2x - 1)} = \exp[(2x - 3) - (2x - 1)] = \exp 4$

### III.4 Exponentielle d'une somme de réels :



#### Propriété

Pour tous réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$ .

**Écriture symbolique :**  $\exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \prod_{i=1}^n \exp(x_i)$

$\Sigma$  signifie « somme » et  $\Pi$  « produit ».

**Démonstration :** On démontre la propriété par **réurrence** sur  $n$ .

- **Initialisation :** Pour  $n = 1$ , il n'y a qu'un terme  $x_1$  ; on a évidemment  $\exp(x_1) = \exp(x_1)!$
- **Hérédité :** on suppose la propriété vraie pour un entier  $n$  quelconque.  $\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$ . Alors :  
 $\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}) = \exp[(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1}] = \exp((x_1 + x_2 + \dots + x_n)) \times \exp(x_{n+1})$  (d'après la propriété fonctionnelle de l'exponentielle) =  $[\exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)] \times \exp(x_{n+1}) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n) \times \exp(x_{n+1})$ . (c.q.f.d.)



#### Propriété

Pour tout réel  $x$ ,  $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ .

**Démonstration :** Lorsque  $n > 0$ , on applique la propriété précédente en prenant tous les  $x_i$  égaux à  $x$ . Pour  $n = 0$ , l'égalité est vérifiée.

Si  $n < 0$ ,  $\exp(nx) = \exp((-n)(-x)) = (\exp(-x))^{-n} = \left[\frac{1}{\exp x}\right]^{-n} = (\exp(x))^n$

### III.5 Le nombre $e$ ; la notation $e^x$ :

#### Définition

$e = \exp(1)$ . Valeur approchée :  $e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995$ .

Pour la plupart des exercices, il suffit d'utiliser  $e \approx 2,7$  ou  $e \approx 2,72$ .

Remarque :  $e$  est, comme  $\pi$ , un nombre transcendant, c'est-à-dire solution d'aucune équation polynomiale, donc en particulier c'est un nombre non rationnel)

#### Notation

Pour tout entier  $n$ , on a :  $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp 1)^n = e^n$  en utilisant la notation précédente. Plus généralement, on convient de noter  $\exp(x)$  par  $e^x$ .

### III.6 Résumé des différentes propriétés avec cette notation :

#### Propriétés

Pour tous réels  $x, y$  et tout entier relatif  $n$  :

- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

**Remarque** : cela ressemble aux règles de calculs sur les puissances vues au collège avec des exposants entiers (ce n'est pas un hasard!)

### III.7 Courbe représentative avec les tangentes en 0 et 1

- La tangente en 0 a pour coefficient directeur  $\exp'(0) = \exp(0) = e^0 = 1$ .
- La tangente en 1 a pour équation  $y = \exp'(1)(x - 1) + e^1 = ex$ ; cette tangente passe donc par l'origine.
- La fonction  $\exp$  est croissante; l'axe des abscisses est asymptote à  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $-\infty$  puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .
- $e^1 = e \approx 2,7$  et  $e^2 \approx 7,4$

#### Courbe représentative de $\exp$

