Principe d’une démonstration par récurrence

Principe

Une démonstration par récurrence permet, dans certains cas, de démontrer qu'une propriété dépendant d'un entier naturel est vraie pour toutes les valeurs de cet entier naturel.

Comme on ne peut pas démontrer la propriété pour chaque valeur de n (car on aurait une infinité de démonstrations à effectuer), il faut trouver une autre méthode, qui ressemble à la chute de dominos en cascade.

Description de l’ensemble des entiers naturels

Ce principe est basé sur la description de l’ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \cdots\}$

Description de l'ensemble des entiers naturels

Ce principe est basé sur la description de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \cdots\}$

Il existe un plus petit entier, 0.

Description de l'ensemble des entiers naturels

Ce principe est basé sur la description de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \cdots\}$

Il existe un plus petit entier, 0.

Chaque entier autre que 0 s'obtient en ajoutant 1 à son prédécesseur.

Axiome de récurrence

Si une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 (initialisation) et s'il est prouvé que, lorsqu'elle est vraie pour un entier p quelconque supérieur ou égal à n_0, alors elle est vraie pour $p+1$ (hérédité), alors elle est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple rédigé de la démonstration d'une propriété

Soit $\mathscr{P}_n$ une proposition qui dépend d'un entier n naturel. On veut montrer que cette proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

.

Exemple rédigé de la démonstration d'une propriété

Soit $\mathscr{P}_n$ une proposition qui dépend d'un entier n naturel. On veut montrer que cette proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

On suit la méthode suivante :

Exemple rédigé de la démonstration d'une propriété

Soit $\mathscr{P}_n$ une proposition qui dépend d'un entier n naturel. On veut montrer que cette proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

On suit la méthode suivante :

On vérifie que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie. (amorçage de la récurrence ou initialisation).

Exemple rédigé de la démonstration d'une propriété

Soit $\mathscr{P}_n$ une proposition qui dépend d'un entier n naturel. On veut montrer que cette proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$
.

On suit la méthode suivante :

On vérifie que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie. (amorçage de la récurrence ou initialisation).

• On démontre que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que si $\mathscr{P}_n$ est vraie à un rang $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence), alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Alors, d'après l'axiome de récurrence, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple concret

Exemple concret

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Exemple concret

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Rédaction

Exemple concret

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Rédaction

Notons $\mathscr{P}_n$ l'affirmation : $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Exemple concret

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Rédaction

Notons $\mathscr{P}_n$ l'affirmation : $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Effectuons une démonstration par récurrence :

Exemple concret

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Rédaction

Notons $\mathscr{P}_n$ l'affirmation : $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Effectuons une démonstration par récurrence :

Initialisation : $n = 0$: $2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 = u_0$: $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier n quelconque, donc que $u_n = 2 \times 5^n + 1$. (hypothèse de récurrence).

Hérédité : On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier n quelconque, donc que $u_n = 2 \times 5^n + 1$. (hypothèse de récurrence).

Il faut alors montrer que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier n quelconque, donc que $u_n = 2 \times 5^n + 1$. (hypothèse de récurrence).

Il faut alors montrer que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$u_{n+1} = 5u_n - 4$ (définition de la suite)
$= 5 \times (2 \times (5^n + 1) - 4$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
$= 10 \times 5^n + 5 - 1 = 10 \times 5^n + 1 = 2 \times 5 \times 5^n + 1 = 2 \times 5^{n+1} + 1$ (c.q.f.d)

Conclusion

D'après l'axiome de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.