Spécialité de Terminale : devoir sur feuille n° 2

I

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.

Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.

Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016+n$, on a donc $u_0 = 27500$.

1. (a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
   (b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.
3. Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leqslant$ ...... faire
L6		n prend la valeur ......
L7		U prend la valeur ......
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher ....

4. (a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
   Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	...
Valeur de n	0	...	
Valeur de U	27 500	...	

   (b) Donner la valeur affichée en sortie de cet algorithme.
5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
   Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3900$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 23600 \times 1,04^n + 3900$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

II

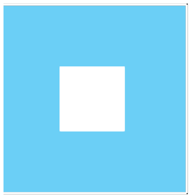
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier nturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}.$$

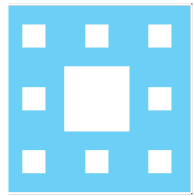
1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on donnera sa raison et son premier terme.
   (b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Calculer s_0, s_1 et s_2. Que peut-on conjecturer ?
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?
4. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.
5. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:
   (a) $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   (b) $W_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

III D'après le livre CQFD 1re

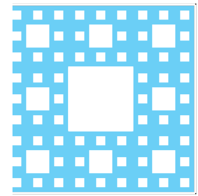
Dans un lointain futur, sur la planète Thêta, vivent Horion et Apolline au sein d'une colonie d'humains, gouvernée avec bienveillance par une I.A. Mais tout n'est pas si paisible sur la planète Thêta…« Le tapis est mité » constate Horion.« Tu pourrais au moins cacher ta joie » s'emporte Apolline qui adorait son tapis laineux.
Le tapis carré de 1 m de côté, ravissant, selon les goûts d'Apolline, hideux selon les critères d'Horion, est effectivement attaqué par des mites. « Il s'agit de mites de l'espèce Waclaw », croit bon de préciser l'I.A. à qui personne n'avait rien demandé, exaspérant davantage Apolline.
Les mites ont leur stratégie ; le premier jour, elles s'attaquent à la partie centrale du tapis : si on partage le tapis carré en 9 carrés de même aire, les mites mangent le carré central. Le second jour, elles s'attaquent de la même manière aux 8 carrés autour du carré manquant, et ainsi de suite pour les autres jours.
(Remarque : la figure « limite » qu'on obtient ainsi d'appelle le « tapis de Sierpinski », du nom du mathématicien polonais Waclaw Franciszek Sierpinski 1882-1961)



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

Horion, ravi, commente : « Au final, cela fera un joli tapis en dentelle, et dans quelques jours elles feront des troussi petits qu'on ne les verra plus. ».
Apolline lui répond, furieuse : « Le tapis va disparaître complètement ! ». Horion n'en espérait pas tant !
Étudions ces deux affirmations ;
Pour tout entier $n \geqslant$, on désigne par c_n la longueur, en m, du côté d'un trou carré qui apparaît au n-ième jour et A_n l'aire, en m^2, de la surface totale mangée par les mites après n jours.

1. Montrer que (c_n) est une suite géométrique et, pour tout entier $n \geqslant$, exprimer c_n en fonction de n.
2. Quelle est la valeur de A_1 ?
   Vérifier ensuite que $A_2 = \dfrac{17}{81}$
3. Chaque jour, les mites mangent $\dfrac{1}{9}$ de la partie du tapis restante.
   Montrer que, pour tout entier $n \geqslant$, on a $A_{n+1} = \dfrac{8}{9} A_n + \dfrac{1}{9}$.
4. (a) Pour tout entier $n \geqslant$, on pose $B_n = A_n - 1$. Montrer que (B_n) est une suite géométrique.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant$, en déduire l'expression de B_n, puis de A_n en fonction de n.
5. (a) À partir de combien de jours la surface du tapis sera-t-elle mangée à 99 % au moins ?
   (b) Sachant qu'à une distance supérieure à 1 m, un oeil humain normalement constitué ne peut distinguer de détail sur un tapis inférieur à 0,5 mm, au bout de combien de jours ne verra-t-on plus les nouveaux trous formés ?
6. Que penser de chacune des affirmations de Horion et d'Apolline ?

IV

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x^2+6x+5} \geqslant 1$

b) $e^{-x^2-3x+5} \geqslant e$.

V

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2 e^x - 1$.
   (a) Déterminer une expression de la dérivée de g.
   (b) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
   (e) En déduire le tableau de signes de g(x) sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Expliquer pourquoi la fonction f n'est pas définie en 0.
   (b) Déterminer une expression de la dérivée de f.
   (c) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
   (d) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.