Spécialité de Terminale : correction du contrôle sur les limites

I (Question de cours : 2 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut sur x suffisamment grand.
Mathématiquement : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$.

II (4,5 points)

Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto x^2 - 5x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.
On a une forme indéterminée pour la limite en $-\infty$.
Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right) = 1$ donc, par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty}$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 9}{x}$ (définie sur $\mathbb{R}^*$)
On a une forme indéterminée car le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers l'infini à l'infini.
$\dfrac{x^2 - 5x + 9}{x} = \dfrac{x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{9}{x^2}\right)}{x} = x\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{9}{x^2}\right)$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{9}{x^2}\right) = 1$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{9}{x^2}\right) = 1$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 5}{3x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
On a encore une forme indéterminée.
Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}}$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

III (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x-2}$.
On se propose d'étudier la limite de $f(x)$ en 2.

1. (a) $\lim\limits_{x\to2}(-3x+1) = \boxed{-5}$
   (b) $\lim\limits_{x\to2}(x-2) = \boxed{0}$
2. (a) Tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

(b) On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty}$ car le numérateur et le dénominateur sont négatifs.

De même : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty}$ car le numéérateur est négatif et le dénominateur positif.

IV (3,5 points)

1. On cherche l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 5.$$

Il faut trouver une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et tendant vers 5 à l'infini.
Voilà deux exemples possibles :

- $f(x) = 5$ (fonction constante).
- $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x^2+1}$, qui est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Trouvons l'expression d'une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous par :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

On peut prendre par exemple : $\boxed{f(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2}}$.

(b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ donc la courbe admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote.
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$ donc la courbe admet la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote.

V (3 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par :

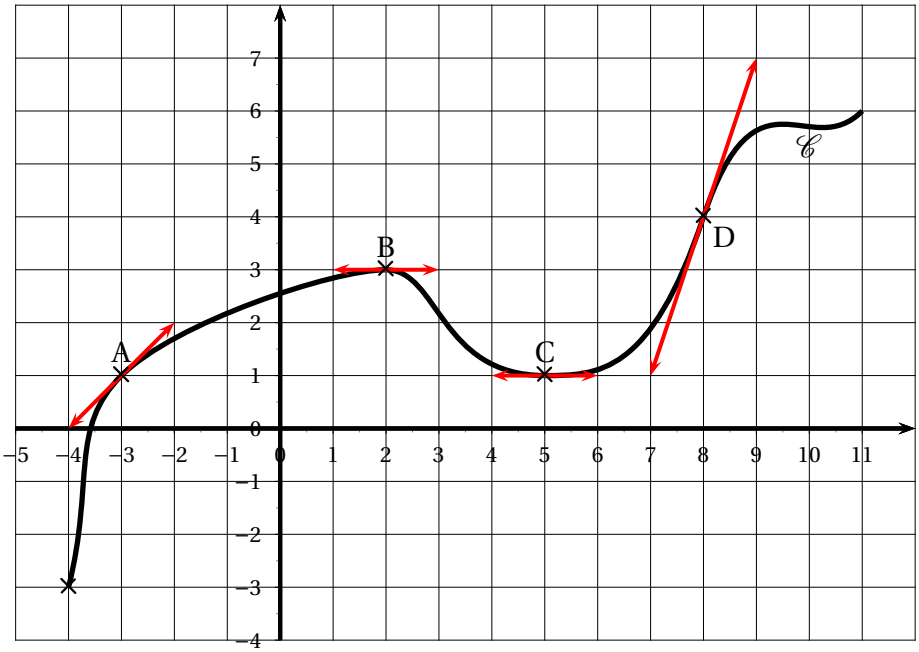
$$f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x-2}$$

1. Juliette affirme que, puisque 2 est une valeur interdite, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
Cela ne suffit pas. avoir une valeur interdite est nécessaire, mais il faut de plus que la limite en cette valeur soit infinie.

2.
- Première façon : $\Delta = (-7)^2 - 4\times 1\times 10 = 9 > 0$ donc ce trinôme du second degré a deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{7+3}{2} = 5$ donc $x^2-7x+10 = (x-x_1)(x-x_2) = \boxed{(x-2)(x-5)}$.
- Deuxième façon : $(x-2)(x-5) = x^2-5x-2x+10 = x^2-7x+10$ donc $\boxed{x^2-7x+10 = 8(x-2)(x-5)}$.

3. **Remarque** : la question 2. N'est pas là par hasard ; le résultat de la factorisation sert sans doute à quelque chose !
On en déduit que, pour $x \neq 2$, $\dfrac{x^2-7x+10}{-2} = \dfrac{(x-2)(x-5)}{-2} = x-5$ donc
$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}\right) = \boxed{\lim\limits_{x\to 2}(x-5) = -3}$.
La courbe n'admet donc pas d'asymptote en $x = 3$. Juliette avait tort.

VI (2,5 points)



Par définition, $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

- La tangente en A a pour coefficient directeur 1, puisqu'elle passe par les points A de coordonnées (-3 ; 1) et le point de cordonnées $(-2\ ;\ 2)$, donc $\boxed{f'(-3) = 1}$.
- En B, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, donc $\boxed{f'(2) = 0}$.
- De même, $\boxed{f'(5) = 0}$.
- En D, la tangente à $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur 3, donc $\boxed{f'(8) = 3}$.

VII (1,5 points)

Pour les fonctions suivantes, donner l'expression de leur dérivée.

1. $f(x) = x^7$ sur $\mathbb{R}$. $\boxed{f'(x) = 7x^6}$
2. $g(x) = \sqrt{x}$ pour $x > 0$. $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ sur $\mathbb{R}^*$; $\boxed{f'(x) = -\dfrac{5}{x^6}}$